３．素因数分解

◎　因数と素因数，素因数分解

72＝８×９　と表すことができる　　　　　この時，８，９は72の因数といいます

72＝３×４×６　とも表すこともできる　　この時，３，４，６は72の因数といいます

自然数がいくつかの整数の積の形で表されるとき、

その１つ１つの数をもとの数の（　　　　　）といいます

２，３，５，７，１１などは、１を使わない限り自然数の積で表すことができません

このような自然数を（　　　　　）といいます

素数は，数を組み立てるもとの数です。台所にあるのは味の？ですね。

「　１　」は素数ではありません。さらにもとのもとですね。

素数である因数を（　　　　　）といいます。　72＝2×2×2×3×3　のように

自然数を素数のみの積で表すことを（　　　　　　　　　　）といいます

問１．次の表の中での素数に〇印をつけなさい。

１	2	3	4	5	6	7	8	9	１０
１１	１２	１３	１４	１５	１６	１７	１８	１９	２０
２１	２２	２３	２４	２５	２６	２７	２８	２９	３０
３１	３２	３３	３４	３５	３６	３７	３８	３９	４０
４１	４２	４３	４４	４５	４６	４７	４８	４９	５０
５１	５２	５３	５４	５５	５６	５７	５８	５９	６０
６１	６２	６３	６４	６５	６６	６７	６８	６９	７０
７１	７２	７３	７４	７５	７６	７７	７８	７９	８０
８１	８２	８３	８４	８５	８６	８７	８８	８９	９０
９１	９２	９３	９４	９５	９６	９７	９８	９９	１００

問１．エラトステネスのふるい

① １を消す　　　　　　　　　　：１は素数に入らないので

② ２を残し、２以外の２の倍数を消す：２は素数

③ ３を残し、３以外の３の倍数を消す：３は素数

④ ５を残し、５以外の５の倍数を消す：５は素数

⑤ ７を残し、７以外の７の倍数を消す：７は素数　　残った２５個が素数となります

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

疑問点：何で，次の素数１１の倍数などを消さなくて良いのだろうか？

１１×２⇒２の倍数で消えている
１１×３⇒３の倍数で消えている
１１×４⇒２の倍数で消えている
１１×５⇒５の倍数で消えている
１１×６⇒２，３の倍数で消えている
１１×７⇒７の倍数で消えている
１１×８⇒２の倍数で消えている
１１×９⇒３の倍数で消えている
１１×10⇒100より大きくなってしまう

同様に１３の倍数以降も調べる必要がなくなっている

◎　素因数分解

例１．７２を素因数分解してみよう

①素数で順に割っていく方法：

基本はこちらのやり方の方が便利だと思われる

小さい順で割った方が後でまとめやすいが、気がついた順でも構わない

2）７２	3）７２	2）７２
2）３６	2）２４	3）３６
2）１８	2）１２	2）１８
3）　９	3）　６	3）　６
3	2	2

最後に残った数（○印の数字）が素数になったら終了です。

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^3 \times 3^2$　　　答えは必ず指数を使って表します

疑問：今までの割り算と書き方が逆だ。何故だろう。

割り算は，割り切れずに余りが出ると，位を下げてからまた割るという作業の繰り返しでした。答えを上に書き，途中式を下に伸ばしていきました。

素因数分解するときの割り算は，必ず割り切れる数で割ります。そして，割り切れた数(答え)をまた割らなくてはいけません。このとき，答えを上に上に伸ばしていくには、上の部分を空けておかなければいけません。どれだけ空けようか分かりませんので、答えを下に下に伸ばしていく方が合理的です。

②まず頭に浮かんだかけ算を書く方法：

上手くはまると素早くできる時もあるが、結果が分かりにくく

２つ以上に数字をまとめて割ることができない。

$72 = 8 \times 9$　　　まず頭に浮かんだかけ算を書く

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$　　　８と９をさらに細かく分けていく

$= 2^3 \times 3^2$

問１．次の自然数をノートに素因数分解しなさい。

(ｱ)　２０　　(ｲ)　５４　　(ｳ)　１２０

(ｴ)　１２６　　(ｵ)　１４４　　(ｶ)　６４

おまけだよ：

２の倍数の見分け方：一の位だけ見る　偶数なら２の倍数

５の倍数の見分け方：一の位だけ見る　「０」か「５」なら５の倍数

４の倍数の見分け方：下２ケタだけ見る　下２ケタが４で割り切れれば、全体も４の倍数
（4×25＝100になるから）

８の倍数の見分け方：下３ケタだけ見る　下３ケタが８で割り切れれば、全体も８の倍数
（8×125＝1000になるから）

３の倍数の見分け方：全ての位の数を足す　足した数が３の倍数なら、全体も３の倍数
１ケタになるまで，繰り返して足しても良い
３の倍数の数字があったら除くと早い

百の位の数をa，十の位の数をb，一の位の数をcとすると
数の大きさは，$100a+10b+c$と表すことができる

$$=99a+9b+(a+b+c)$$
$$=9(11a+b)+\underbrace{(a+b+c)}_{\text{この部分だけ調べれば良い}}$$

９の倍数の見分け方：全ての位の数を足す　足した数が９の倍数なら、全体も９の倍数
１ケタになるまで，繰り返して足しても良い
９の倍数の数字があったら除くと早い

百の位の数をa，十の位の数をb，一の位の数をcとすると
数の大きさは，$100a+10b+c$と表すことができる

$$=99a+9b+(a+b+c)$$
$$=9(11a+b)+\underbrace{(a+b+c)}_{\text{この部分だけ調べれば良い}}$$

７，１１，１３の倍数の見分け方もあるので、興味があったら自分で調べてみよう

◎　ある数の２乗になるための条件とは

２乗した数字を素数に分解すると、必ず同じ素数が２個ずつあることは当然である。

$$5^2 = 5 \times 5$$
$$6^2 = (2\times3)^2 = (2\times3)\times(2\times3) = 2^2\times3^2$$
$$10^2 = (2\times5)^2 = (2\times5)\times(2\times5) = 2^2\times5^2$$
$$21^2 = (3\times7)^2 = (3\times7)\times(3\times7) = 3^2\times7^2$$
$$18^2 = (2\times3\times3)^2 = (2\times3\times3)\times(2\times3\times3) = 2^2\times3^2\times3^2$$
$$20^2 = (2\times2\times5)^2 = (2\times2\times5)\times(2\times2\times5) = 2^2\times3^2\times5^2$$

例２．12にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

小さくなくても良ければ、12をかければ良い。12の２乗になる
一番小さい数を探すためには，12を素因数分解をしてペアになるように考える

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$12=\underbrace{2\times2}_{\text{ペア}}\times\underbrace{3}_{\text{単独}}$

これに3 をかけると

$2\times2\ \times3\times3$　となり

$=(2\times3)^2$

$=6^2$

Ans.　3をかけると（2×3＝6）の2乗になる

問２．75にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

問３．問２のできるだけ小さい自然数という条件がなかったら、答えはどうなるだろうか？

問４．24にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

問５．28にできるだけ小さい自然数をかけて，ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また，そのとき，どんな数の２乗になっていますか。

問６．40にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

問７．18n がある数の２乗となるような n のうち，2番目に小さい自然数 n の値を求めなさい。

問８．24n がある数の２乗となるような n のうち，最も大きい2けたの自然数 n の値を求めなさい。

解答：問１～問８

問１．次の自然数をノートに素因数分解しなさい。

(ｱ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

素数になったら終了

$20 = 2^2 \times 5$

(ｲ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

☚ 54÷2
☚ 27÷3
☚ 9÷3

$54 = 2 \times 3^3$

(ｳ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

(ｴ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

☚ 126÷2
☚ 63÷3
☚ 21÷3

$126 = 2 \times 3^2 \times 7$

(ｵ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 144 \\ \hline 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$144 = 2^4 \times 3^2$

(ｶ)

$$\begin{array}{r|r} 2 & 64 \\ \hline 2 & 32 \\ \hline 2 & 16 \\ \hline 2 & 8 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$64 = 2^6$

問２．75にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

$$\begin{array}{r|r} 5 & 75 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$75 = \underline{3} \times 5^2$

2個ないのは$\underline{3}$

3をかけると

$3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2$となる

Ans．3をかける。15の2乗になる。

問３．問２のできるだけ小さい自然数という条件がなかったら、答えはどうなるだろうか？

$75 = 3 \times 5^2$ に3をかけると　$3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2$　　一番小さい数は3

$75 = 3 \times 5^2$ に$\underbrace{3 \times 2^2}_{12}$をかけると　$3^2 \times 2^2 \times 5^2$
$(3 \times 2 \times 5)^2 = 30^2$　　12をかけると、30の2乗になる

$75 = 3 \times 5^2$ に$\underbrace{3 \times 3^2}_{27}$をかけると　$3^2 \times 3^2 \times 5^2$
$(3 \times 3 \times 5)^2 = 45^2$　　27をかけると、45の2乗になる

$75 = 3 \times 5^2$ に$\underbrace{3 \times 2^2 \times 7^2}_{588}$をかけると　$3^2 \times 2^2 \times 7^2 \times 5^2$
$(3 \times 2 \times 7 \times 5)^2 = 210^2$　　588をかけると、210の2乗になる

１この3は絶対に必要となる。それに加えてある数の２乗をかければ良い。
何個かけても良いのだから答えは無数にできてしまう。

問４．24にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

問５．28にできるだけ小さい自然数をかけて，ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また，そのとき，どんな数の２乗になっていますか。

素因数分解をしなくても，$28=4\times\underline{7}$ と頭に浮かんでしまったら
<u>7をかければ良いと分かる</u>　　　$28\underline{\times 7}=4\times 7\ \times 7=(2\times 7)^2$

Ans．7をかける。14の2乗になる。

問６．40にできるだけ小さい自然数をかけて、ある数の２乗にしたい。
どんな数をかければ良いですか。また、そのとき、どんな数の２乗になっていますか。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 40 \\ \hline 2 & 20 \\ \hline 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$40=2\times 2\ \ \underline{\times 2\times 5}$
$\ \ =2^2\ \ \ \ \underline{\times 2\times 5}$
40に$\underline{2\times 5}$をかければ，$2^2\times 2^2\times 5^2$となるので$(2\times 2\times 5)^2$

Ans．10をかける。20の2乗になる。

問７．$18n$ がある数の２乗となるような n のうち，2番目に小さい自然数 n の値を求めなさい。

$18n=2\times 3\times 3\times n=3^2\underline{\times 2\times n}$

1番小さい自然数は　　$n=2$
2番目に小さい自然数は　$n=2\times 2^2=8$　　⇒　Ans.　$n=8$
3番目に小さい自然数は　$n=2\times 3^2=18$
4番目に小さい自然数は　$n=2\times 4^2=32$

問８．$24n$ がある数の２乗となるような n のうち，最も大きい2けたの自然数 n の値を求めなさい。

$24n=2\times 2\times 2\times 3\times n$
$\ \ \ =2^2\times\underline{2\times 3}\times n$

1番小さい自然数は　　$n=\underline{2\times 3}=6$
2番目に小さい自然数は　$n=\underline{2\times 3}\times 2^2=24$
3番目に小さい自然数は　$n=\underline{2\times 3}\times 3^2=54$
4番目に小さい自然数は　$n=\underline{2\times 3}\times 4^2=96$　　⇒　Ans.　$n=96$