

1 二次方程式とその解き方

◎ 二次方程式とその解

方程式の名前： x について一番次数が高い項の次数の数字を使って名前をつける

x についての 一次方程式 $3x - 5 = 7$, $6x + 8 = x - 5$

x についての 二次方程式 $2x^2 - 50 = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x^2 = 8x$

二次方程式にあてはまる文字の値を, その方程式の () といひ、
解をすべて求めることを, 二次方程式を () という。

◎ 方程式に値を代入して解を探す

例1. 1, 2, 3, 4のうち, $x^2 - 5x + 6 = 0$ の解であるものをすべていいなさい。

二次方程式にあてはまる文字の値を解という。

あてはまるとは: x に値を代入したときに, 等式が成り立つこと。

等式が成り立つとは: x に値を代入したときに, 等式の右辺と左辺が等しくなること

つまり, 左辺の $x^2 - 5x + 6$ の x に数を代入したときの値が0になれば
解であるといえる (右辺が0なので)

$x^2 - 5x + 6$ に $x = 1$ を代入すると $1 - 5 + 6 = 2$ $x = 1$ は解ではない

$x^2 - 5x + 6$ に $x = 2$ を代入すると $4 - 10 + 6 = 0$ $x = 2$ は解である

$x^2 - 5x + 6$ に $x = 3$ を代入すると $9 - 15 + 6 = 0$ $x = 3$ は解である

$x^2 - 5x + 6$ に $x = 4$ を代入すると $16 - 20 + 6 = 2$ $x = 4$ は解ではない

答. 解は2と3

問1. 次の方程式のうち, $x = 1$ が解となっているものを選びなさい。

<とりあえず、解と聞いたら、すぐ代入。別の場合もあるけれどね>

(ア) $3x - 7 = -5$

(イ) $x^2 + 2x - 1 = 2$

(ウ) $x^2 - x + 5 = 0$

(エ) $x^3 + 1 = 2$

◎ 平方根の意味に基づいて二次方程式を解く

例 2. 次の方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} (ア) \quad x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (イ) \quad x^2 &= 7 \\ x &= \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ウ) \quad x^2 &= 12 \\ x &= \pm \sqrt{12} \\ x &= \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

解は、正の数と負の数の2つあります。 $(x^2=0$ のときは1つ)

平方根を答えるときと同じで、2つの解を±を使いまとめて表します。

2乗してその数になる数を頭で考えて、有理数や無理数で答えます。

但し、無理数は平方根の章で学習した $\sqrt{\quad}$ のお約束に従って答えましょう。

お約束 ① $\sqrt{\quad}$ 中はできるだけ小さくする

② 分母の $\sqrt{\quad}$ は必ず有理化する

問 2. 次の方程式を解きなさい。

$$(ア) \quad x^2 = 36$$

$$(イ) \quad x^2 = 5$$

$$(ウ) \quad x^2 = 9$$

$$(エ) \quad x^2 = 11$$

$$(オ) \quad x^2 = 8$$

$$(カ) \quad x^2 = 27$$

$$(キ) \quad x^2 = \frac{9}{4}$$

$$(ク) \quad x^2 = \frac{7}{4}$$

$$(ケ) \quad x^2 = \frac{1}{3}$$

◎ $ax^2 = b$ の形の二次方程式を解く

例 3. 次の方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} (ア) \quad x^2 &= 5 \\ x &= \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (イ) \quad 3x^2 &= 21 \\ \text{両辺} \div 3 \quad x^2 &= 7 \\ x &= \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

「 $x^2 = \text{数字}$ 」の形にしてから、例 2 と同様に、 x の平方根を考える

問3. 次の方程式を解きなさい。

$$(7) 5x^2 = 20$$

$$(1) 3x^2 = 9$$

$$(7) 2x^2 = 12$$

$$(1) 4x^2 = 100$$

$$(4) x^2 - 27 = 0$$

$$(7) x^2 - 8 = 0$$

$$(7) 3x^2 - 12 = 0$$

$$(7) 2x^2 - 36 = 0$$

$$(7) 4x^2 - 3 = 0$$

$$(1) 9x^2 - 2 = 0$$

$$(7) 3x^2 = 5$$

$$(7) 2x^2 - 7 = 0$$

必ず分母は有理化をしましょう。有利化しておかないと不便なことがおきます。

解答：問1～問3

問1. $x = 1$ が解となっているものを選びなさい。

$$(7) 3x - 7 = -5$$

$$\text{左辺} = 3 - 7 = -4$$

$$(1) x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$\text{左辺} = 1 + 2 - 1 = 2$$

解である

$$(7) x^2 - x + 5 = 0$$

$$\text{左辺} = 1 - 1 + 5 = 5$$

$$(1) x^3 + 1 = 2$$

$$\text{左辺} = 1 + 1 = 2$$

解である

問2. 次の方程式を解きなさい。

$$(7) x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$$(1) x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$(7) x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$(1) x^2 = 11$$

$$x = \pm \sqrt{11}$$

$$(4) x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$(4) x^2 = 27$$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

$$(4) x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \pm \frac{3}{2}$$

$$(7) x^2 = \frac{7}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$(7) x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

問3. 次の方程式を解きなさい。

$$(7) 5x^2 = 20$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$(1) 3x^2 = 9$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$(7) 2x^2 = 12$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \pm \sqrt{6}$$

$$(1) 4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$(4) x^2 - 27 = 0$$

$$x^2 = 27$$

$$x = \pm 3\sqrt{3}$$

$$(4) x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$(4) 3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$(7) 2x^2 - 36 = 0$$

$$2x^2 = 36$$

$$x^2 = 18$$

$$x = \pm 3\sqrt{2}$$

$$(7) 4x^2 - 3 = 0$$

$$4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(7) 9x^2 - 2 = 0$$

$$9x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{9}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$(4) 3x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$(7) 2x^2 - 7 = 0$$

$$2x^2 = 7$$

$$x^2 = \frac{7}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$$

◎ $(x + m)^2 = n$ の形の二次方程式 <左辺が()²で、右辺に文字の項がない形>

例 4. 次の方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 = 25 \\ x = \pm 5$$

$$(1) \quad (x + 1)^2 = 25 \\ x + 1 = \pm 5$$

$$x = -1 \pm 5 \\ x = \underline{-1 + 5}, \underline{-1 - 5} \\ x = 4, -6$$

$$(7) \quad (x + 3)^2 - 7 = 0 \\ (x + 3)^2 = 7 \\ x + 3 = \pm \sqrt{7} \\ x = \underline{-3 \pm \sqrt{7}}$$

$\underline{x = -3 + \sqrt{7}}$ と $\underline{x = -3 - \sqrt{7}}$ の2つの答えをまとめて書いた形です。

等式で項を左辺から右辺に移項したとき、右辺の最後に移項した項を書きました。
今回は、左辺から右辺に移項した項は、必ず±の前に書きます。

問 4. 次の方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 = 9$$

$$(1) \quad x^2 = 5$$

$$(7) \quad (x + 1)^2 = 9$$

$$(1) \quad (x - 1)^2 - 9 = 0$$

$$(4) \quad (x - 2)^2 = 5$$

$$(7) \quad (x + 3)^2 - 5 = 0$$

$$(7) \quad (x - 6)^2 - 3 = 0$$

$$(7) \quad 2(x + 3)^2 = 50$$

$$(7) \quad (3x + 2)^2 - 12 = 0$$

$$(1) \quad (2x - 1)^2 - 13 = 0$$

$$(7) \quad (3x + 2)^2 - 5 = 0$$

◎ $x^2 + px + q = 0$ の形を $(x + m)^2 = n$ の形に変形して解く

例 4 では、 $(x + m)^2 = n$ の形の二次方程式を解く練習をしました。

例 5 では、左辺が $(\quad)^2$ の形になっていないときは、 $(\quad)^2$ を自分で作りだし、 $(x + m)^2 = n$ の形に直してから解く練習をします。

但し、以降この解き方を使うことは余りありません。

なのに何で練習するのかというと、この後に出てくる解の公式を理解するためです。

解の公式はどんな問題でも解けてしまう万能選手なのです。

例 5. 次の方程式を解きなさい。

(7) $(x - 3)^2 = 7$

$$x - 3 = \pm \sqrt{7}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$

(1) $x^2 - 6x + 4 = 0$

$$x^2 - 6x = -4$$

$$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 5$$

$$(x - 3) = \pm \sqrt{5}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

① 数字の項を移項する

③ 3より +9 と分かる

② -6x より -3 と分かる

(\quad) の2乗が無いときは、 (\quad) の2乗を自分で作りだします。

① まず数字の項を右辺に移項してから、②の 部分に入る数字を考えます。

$$-6 \div 2 = -3 \quad \text{となります}$$

③ 次に両辺にたす 数字 を考える $(-3)^2 = 9$ となります

もちろん、左辺の4をそのままにしておいて、両辺 +5 と気づけば早いのだが、それだとワンパターンにならず、文字を使い公式を考えるときに使えない。

問 5. 次の方程式を解きなさい。

(7) $x^2 + 6x - 5 = 0$

$$x^2 + 6x = 5$$

$$x^2 + 6x + \underline{\hspace{2cm}} = 5 + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(x + \underline{\hspace{2cm}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = -\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}$$

(1) $x^2 - 4x - 2 = 0$

$$x^2 - 4x = 2$$

$$x^2 - 4x + \underline{\hspace{2cm}} = 2 + \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(x - \underline{\hspace{2cm}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x = \underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}$$

(7) $x^2 - 6x + 2 = 0$

(1) $x^2 + 4x - 1 = 0$

解答：問4，問5

問4.

$$(7) x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$(1) x^2 = 5$$

$$x = \pm \sqrt{5}$$

$$(7) (x + 1)^2 = 9$$

$$(x + 1) = \pm 3$$

$$x = -1 \pm 3$$

$$x = 2, -4$$

$$(1) (x - 1)^2 - 9 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 9$$

$$(x - 1) = \pm 3$$

$$x = 1 \pm 3$$

$$x = 4, -2$$

$$(4) (x - 2)^2 = 5$$

$$(x - 2) = \pm \sqrt{5}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$(7) (x + 3)^2 - 5 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 5$$

$$(x + 3) = \pm \sqrt{5}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{5}$$

$$(4) (x - 6)^2 - 3 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 3$$

$$(x - 6) = \pm \sqrt{3}$$

$$x = 6 \pm \sqrt{3}$$

$$(7) 2(x + 3)^2 = 50$$

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$(x + 3) = \pm 5$$

$$x = -3 \pm 5$$

$$x = 2, -8$$

$$(7) (3x + 2)^2 - 12 = 0$$

$$(3x + 2)^2 = 12$$

$$3x + 2 = \pm 2\sqrt{3}$$

$$3x = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

$$(7) (2x - 1)^2 - 13 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 13$$

$$2x - 1 = \pm \sqrt{13}$$

$$2x = 1 \pm \sqrt{13}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(7) (3x + 2)^2 - 5 = 0$$

$$(3x + 2)^2 = 5$$

$$3x + 2 = \pm \sqrt{5}$$

$$3x = -2 \pm \sqrt{5}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{3}$$

問5.

$$(7) x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$x^2 + 6x = 5$$

$$x^2 + 6x + \underline{9} = 5 + \underline{9}$$

$$(x + \underline{3})^2 = \underline{14}$$

$$x + \underline{3} = \pm \sqrt{14}$$

$$x = \underline{-3 \pm \sqrt{14}}$$

$$(1) x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x = 2$$

$$x^2 - 4x + \underline{4} = 2 + \underline{4}$$

$$(x - \underline{2})^2 = 6$$

$$x - \underline{2} = \pm \sqrt{6}$$

$$x = \underline{2 \pm \sqrt{6}}$$

$$(7) x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$x^2 - 6x = -2$$

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 7$$

$$x - 3 = \pm \sqrt{7}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$

$$(1) x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 5$$

$$x = 2 \pm \sqrt{5}$$

◎ 二次方程式の解の公式を作きましょう

問5では x^2 の係数は1で x の係数は必ず偶数でした。

ここでの左側の式は、 x^2 の係数を2、 x の係数を5とした式で

右側の式は、公式を作るためにすべての係数を文字で表した式です。

大変面倒な作業ですが、公式を覚えやすくなるには一度は通らないといけない道です。

毎回この作業をおこなうのは大変なので、解の公式は必ず覚えなければいけません。

例6. 次の二次方程式を解きなさい。

$$2x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$2x^2 + 5x = 1$$

両辺 ÷ 2 $x^2 + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{1}{2} + \frac{25}{16}$$

右辺を通分する

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{8}{16} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$$

$$x + \frac{5}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x = -\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(二次方程式なので、 $a \neq 0$ である)

$$ax^2 + bx = -c$$

両辺 ÷ a $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

右辺を通分する

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

右辺の項の順番を逆に

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

◎ 二次方程式の解の公式の使い方

例6. 二次方程式 $3x^2 + 5x - 1 = 0$ の解を求めなさい。

$a = 3$, $b = 5$, $c = -1$ なので、これを解の公式に代入する

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-1)}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 12}}{6}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

問6. 次の二次方程式をノートに解きなさい。

(7) $x^2 + x - 3 = 0$

(1) $x^2 - x - 1 = 0$

(ウ) $x^2 + 5x - 4 = 0$

(1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$

(4) $3x^2 + 1 + 7x = 0$

(カ) $4x^2 - 1 + x = 0$

(キ) $5x^2 + 7x + 2 = 0$

(ク) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\sqrt{\quad}$ が有理数になったら計算を進めること

(ケ) $3x^2 = 1 - x$

(コ) $5x^2 + 5x + 4 = 5$

$ax^2 + bx + c = 0$ の形に変形すれば、解の公式が使える

(カ) $3x^2 + 4x - 5 = 0$

(シ) $x^2 - 4x - 3 = 0$

分母と分子の項2つがともに約分できるときは、約分しなくてはいけない。

分子の項2つのうち、1つしか約分できないときは、2つに分けないと約分できないので、約分しないままでおいて良い。

(カ), (シ)の問題は他の問題と異なる箇所がある。どこだろう？

答えは x の係数が偶数 \Rightarrow 最後に約分が必要になる

問 6. (解答)

$$(7) x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$(1) x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(7) x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+16}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$(1) 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(4) 3x^2 + 1 + 7x = 0$$

$$3x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-12}}{6}$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$$(7) 4x^2 - 1 + x = 0$$

$$4x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{8}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$$

(1)と(7)は間違えやすいので、 $ax^2 + bx + c = 0$ の順番にしてから代入しています。
そのまま代入できる人は変える必要はありません。

$$(4) 5x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{10}$$

$$x = \frac{-7 \pm 3}{10}$$

$$x = -\frac{2}{5}, -1$$

$$(7) 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{1}{2}, -3$$

$$(7) 3x^2 = 1 - x$$

$$3x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+12}}{6}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$(1) 5x^2 + 5x + 4 = 5$$

$$5x^2 + 5x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+20}}{10}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{45}}{10}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3\sqrt{5}}{10}$$

$$(4) 3x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+60}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{19}}{6}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{19}}{3}$$

$$(7) x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{7}$$

◎ 因数分解を利用した二次方程式の解法

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \text{ を解きなさい。}$$

$$\text{解答例 } \begin{cases} A = 0 \\ B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 9 \\ B = 0 \end{cases}$$

答は無数にありますが、AかBのどちらか一方が0になれば、他方はいくつでも関係なく、かけ算すれば0になるので、すべてを上手くまとめて答えると

$$\mathbf{A} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{B} = 0 \quad \text{となります。}$$

例1. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) (x + 7)(x - 8) = 0$$

$x + 7 = 0$ か $x - 8 = 0$ が成り立てば良いので 答 $x = -7, 8$

$$(1) x(x + 3) = 0$$

$x = 0$ か $x + 3 = 0$ が成り立てば良いので 答 $x = 0, -3$

$x = 0$ を忘れる場合が多いので注意

$$(ウ) (x - 5)^2 = 0$$

$x - 5 = 0$ が成り立てば良いので

答 $x = 5$

()² の時は答が1つだけになる

問1. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) (x - 4)(x - 7) = 0$$

$$(1) (x + 9)(x + 7) = 0$$

$$(ウ) (x + 3)(x - 5) = 0$$

$$(エ) x(x - 9) = 0$$

$$(オ) (x - 8)^2 = 0$$

$$(カ) (x + 1)^2 = 0$$

$$(キ) x(x + 8) = 0$$

$$(ク) (2x + 1)^2 = 0$$

◎ 因数分解を利用して，二次方程式を解く－Ⅰ

二次方程式も因数分解できる式は，因数分解を利用して解くと楽である

例 2. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$(x + 2)(x + 5) = 0$$

$$x = -2, -5$$

$$(1) \quad x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x = -2, 5$$

問 2. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(1) \quad x^2 + x - 12 = 0$$

$$(7) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(1) \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(b) \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(4) \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(7) \quad x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$(7) \quad x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(1) \quad x^2 - 14x + 24 = 0$$

◎ 因数分解を利用して，二次方程式を解く－Ⅱ

例 3. 次の二次方程式を解きなさい。

$$\begin{array}{lll} (7) \quad x^2 - 8x = 0 & (1) \quad 3x^2 = 6x & (7) \quad 3x^2 - 5x = 0 \\ \quad x(x - 8) = 0 & \quad 3x^2 - 6x = 0 & \quad x(3x - 5) = 0 \\ \quad \quad \quad x = 0, 8 & \quad 3x(x - 2) = 0 & \quad \quad \quad x = 0, \frac{5}{3} \\ & \quad \quad \quad x = 0, 2 & \end{array}$$

(7) $x = 0$ を忘れる場合が多いので注意

(1) $3x^2 = 6x$ の両辺を x で割って $x = 2$ だけと間違えることが多いです。

この x で割ること自体が間違えです。等式の両辺を同じ数で割っても，等式が成り立つという等式の性質はありますが，0 で両辺を割ることはできません。文字で割るときは， $x = 0$ のときも含まれてしまいますので，必ず， $x \neq 0$ の時という条件がつきます。

$$(7) \quad 3x^2 = 5x \quad 3x - 5 = 0 \quad 3x = 5 \quad x = \frac{5}{3} \quad \text{この計算を暗算でできるように}$$

問 3. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 + 5x = 0 \qquad (1) \quad x^2 - 2x = 0 \qquad (7) \quad n^2 = 3n$$

$$(1) \quad 2x^2 = 7x \qquad (4) \quad 3x^2 - 12x = 0 \qquad (b) \quad 4x^2 = -20x$$

$$(4) \quad 3x^2 = -5x \qquad (7) \quad 2x^2 - 9x = 0 \qquad (7) \quad -x^2 - 2x = 0$$

$$(1) \quad -3x^2 + 2x = 0 \qquad (1) \quad -4x^2 + 8x = 0$$

◎ 因数分解を利用して、二次方程式を解く－Ⅲ

例4. 次の二次方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} (7) \quad x^2 - 6x + 9 &= 0 \\ (x - 3)^2 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 + 14x + 49 &= 0 \\ (x + 7)^2 &= 0 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

$(x + a)^2 = 0$ の形は、答えが1つになる

問4. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(7) \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(1) \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(7) \quad 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(1) \quad 9x^2 - 30x + 25 = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 25 = 10x$$

$$(4) \quad x^2 + 16 = -8x$$

$A^2 = 0$ の形を利用するには、 $ax^2 + bx + c = 0$ の形にしてから、左辺を因数分解する。

◎ 因数分解を利用して、二次方程式を解く－Ⅳ

例5. 次の二次方程式を解きなさい。

$$\begin{aligned} (7) \quad x^2 &= 49 \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 - 49 &= 0 \\ (x + 7)(x - 7) &= 0 \\ x &= \pm 7 \end{aligned}$$

(7)と(1)の内容は同じです。2つの解法を使い分けられると素晴らしいです。
(7) 平方根の性質を利用して解く方法ですが、解ける範囲が広いのでお勧めです。
(1) 因数分解ができる場合にのみ、因数分解を利用して解くことができます。

問5. 次の二次方程式を解きなさい。(分母は必ず有理化をすること)

$$(7) y^2 - 64 = 0$$

$$(1) n^2 = 3$$

$$(7) 4x^2 - 8 = 0$$

$$(1) 2x^2 - 24 = 0$$

$$(4) x^2 - 17 = 0$$

$$(4) y^2 - 100 = 0$$

$$(4) 2x^2 - 5 = 0$$

$$(7) 6x^2 = 14$$

解答：問1～問5

問1. 因数分解を利用した二次方程式の解法

$$(7) (x - 4)(x - 7) = 0 \\ x = 4, 7$$

$$(1) (x + 9)(x + 7) = 0 \\ x = -9, -7$$

$$(7) (x + 3)(x - 5) = 0 \\ x = -3, 5$$

$$(1) x(x - 9) = 0 \\ x = 0, 9$$

$$(4) (x - 8)^2 = 0 \\ x = 8$$

$$(4) (x + 1)^2 = 0 \\ x = -1$$

$$(4) x(x + 8) = 0 \\ x = 0, -8$$

$$(7) (2x + 1)^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2}$$

問 2. 因数分解を利用して、二次方程式を解く - I

$$(7) \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

$$x = -2, -3$$

$$(1) \quad x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$x = -4, 3$$

$$(7) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1, 3$$

$$(1) \quad x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x = -2, 3$$

$$(4) \quad x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$x = -5, 3$$

$$(4) \quad x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x - 1)(x - 7) = 0$$

$$x = 1, 7$$

$$(4) \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$(x - 4)(x - 6) = 0$$

$$x = 4, 6$$

$$(7) \quad x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$(x + 1)(x - 8) = 0$$

$$x = -1, 8$$

$$(7) \quad x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x + 4)(x - 6) = 0$$

$$x = -4, 6$$

$$(7) \quad x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$(x - 12)(x - 2) = 0$$

$$x = 12, 2$$

問 3. 因数分解を利用して、二次方程式を解く - II

$$(7) \quad x^2 + 5x = 0$$

$$x(x + 5) = 0$$

$$x = 0, -5$$

$$(1) \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

$$(7) \quad n^2 = 3n$$

$$n^2 - 3n = 0$$

$$n(n - 3) = 0$$

$$n = 0, 3$$

$$(1) \quad 2x^2 = 7x$$

$$2x^2 - 7x = 0$$

$$x(2x - 7) = 0$$

$$x = 0, \frac{7}{2}$$

$$(4) \quad 3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$x = 0, 4$$

$$(4) \quad 4x^2 = -20x$$

$$4x^2 + 20x = 0$$

$$4x(x + 5) = 0$$

$$x = 0, -5$$

$$(4) \quad 3x^2 = -5x$$

$$3x^2 + 5x = 0$$

$$x(3x + 5) = 0$$

$$x = 0, -\frac{5}{3}$$

$$(7) \quad 2x^2 - 9x = 0$$

$$x(2x - 9) = 0$$

$$x = 0, \frac{9}{2}$$

$$(7) \quad -x^2 - 2x = 0$$

$$-x(x + 2) = 0$$

$$x = 0, -2$$

$$(2) \quad -3x^2 + 2x = 0$$

$$-x(3x - 2) = 0$$

$$x = 0, \frac{2}{3}$$

$$(1) \quad -4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 2$$

-でくくっている理由は、括弧内の x の係数を + にしておいた方が解が求めやすいから

問4. 因数分解を利用して、二次方程式を解く - III

$$(7) \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x = -2$$

$$(1) \quad x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$(x - 6)^2 = 0$$

$$x = 6$$

$$(7) \quad 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$(1) \quad 9x^2 - 30x + 25 = 0$$

$$(3x - 5)^2 = 0$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$(4) \quad x^2 + 25 = 10x$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x - 5)^2 = 0$$

$$x = 5$$

$$(4) \quad x^2 + 16 = -8x$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0$$

$$(x + 4)^2 = 0$$

$$x = -4$$

問5. 因数分解を利用して、二次方程式を解く - IV

$$(7) \quad y^2 - 64 = 0$$

$$(y + 8)(y - 8) = 0$$

$$y = \pm 8$$

$$(1) \quad n^2 = 3$$

$$n = \pm \sqrt{3}$$

$$(7) \quad 4x^2 - 8 = 0$$

$$4x^2 = 8$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$(1) \quad 2x^2 - 24 = 0$$

$$2x^2 = 24$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$(4) \quad x^2 - 17 = 0$$

$$x^2 = 17$$

$$x = \pm \sqrt{17}$$

$$(4) \quad y^2 - 100 = 0$$

$$(y + 10)(y - 10) = 0$$

$$y = \pm 10$$

$$(4) \quad 2x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(7) \quad 6x^2 = 14$$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$

◎ 問題に適した方法で二次方程式を解く

解き方を選ぶ時の目安

- ① $x^2 = A$ の形の時、あるいは $x^2 = A$ の形に変形しやすい時は
平方根の性質を使って解く
- ② ①以外の方は、 $x^2 + ax + b = 0$ の形に変形して
左辺が因数分解できる時は、左辺を因数分解し、 $AB = 0$ の性質を利用して解く
左辺が因数分解できない時は、二次方程式の解の公式を利用して解く
計算の途中は、自分が間違いにくい方法で書こう

例 6. 次の二次方程式を解きなさい。

$$(x + 2)(x - 3) = 2x(x + 3)$$

括弧を外す

$$x^2 - x - 6 = 2x^2 + 6x$$

左辺 = 0 の形にする

$$-x^2 - 7x - 6 = 0$$

両辺 $\times (-1)$ をして因数分解をしやすくする

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

因数分解をする

$$(x + 6)(x + 1) = 0$$

$$x = -6, -1$$

問 6. 次の二次方程式をノートに解きなさい。

(ア) $(x - 3)(x - 7) = 5$

(イ) $x(9 - x) = 20$

(ウ) $x(x + 4) = 5$

(エ) $3y + 10 = y^2$

(オ) $3x^2 - 7x = -3$

(カ) $5x^2 - 3(x - 2) = 7$

(キ) $(x + 1)(x - 2) = 3x - 5$

(ク) $x(x - 4) = x + 24$

(ケ) $(x + 1)(x - 3) = x - 4$

(コ) $(x - 2)(x + 3) = 2x + 6$

解答 問6. 問題に適した方法で二次方程式を解く

左辺=0の形になっていない式には、 $AB=0$ の性質は使えませんので注意しよう

$$\begin{aligned} (7) \quad & (x-3)(x-7)=5 \\ & x^2-10x+21-5=0 \\ & x^2-10x+16=0 \\ & (x-2)(x-8)=0 \\ & x=2, 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & x(9-x)=20 \\ & 9x-x^2=20 \\ & -x^2+9x-20=0 \\ & \text{両辺} \times (-1) \\ & x^2-9x+20=0 \\ & (x-4)(x-5)=0 \\ & x=4, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad & x(x+4)=5 \\ & x^2+4x=5 \\ & x^2+4x-5=0 \\ & (x+5)(x-1)=0 \\ & x=-5, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3y+10=y^2 \\ & 0=y^2-3y-10 \quad \text{右辺にまとめました} \\ & (y+2)(y-5)=0 \quad \text{因数分解の結果を左辺に} \\ & y=-2, 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & 3x^2-7x=-3 \\ & 3x^2-7x+3=0 \\ & x=\frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & 5x^2-3(x-2)=7 \\ & 5x^2-3x+6=7 \quad \text{括弧を外す} \\ & 5x^2-3x-1=0 \quad =0\text{の形にする} \end{aligned}$$

$$x=\frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x=\frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{10}$$

$$x=\frac{3 \pm \sqrt{29}}{10}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad & (x+1)(x-2)=3x-5 \\ & x^2-x-2-3x+5=0 \\ & x^2-4x+3=0 \\ & (x-1)(x-3)=0 \\ & x=1, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad & x(x-4)=x+24 \\ & x^2-4x-x-24=0 \\ & x^2-5x-24=0 \\ & (x+3)(x-8)=0 \\ & x=-3, 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad & (x+1)(x-3)=x-4 \\ & x^2-2x-3=x-4 \\ & x^2-3x+1=0 \\ & x=\frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \\ & x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x-2)(x+3)=2x+6 \\ & x^2+x-6=2x+6 \\ & x^2-x-12=0 \\ & (x+3)(x-4)=0 \\ & x=-3, 4 \end{aligned}$$