１．式の計算の利用

◎ 数の計算の工夫（因数分解を利用して）

例１．工夫して，次の計算をしましょう。

$$
\begin{aligned}
&1013^2-1012^2\\
&=(1013+1012)\times(1013-1012)\\
&=2025\times 1\\
&=2025
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a^2-b^2\\
&=(a+b)(a-b)
\end{aligned}
$$

普通に計算をせずに、因数分解してから計算すると簡単になるときがあります
足したり引いたりしたときに
計算しやすい数字の「１」，「100」，「50」になる場合は有効な方法です。

素直に計算すると　$1013^2-1012^2=1026169-1024144=2025$
この計算をするのはとても大変です。そろばんの暗算ができる人は同じかも？

問１．工夫して，次の計算をしましょう。

(ア) 1324^2-1323^2

(イ) 76^2-24^2

(ウ) 4321^2-4320^2

(エ) 101^2-99^2

(オ) 113^2-13^2

(カ) 125^2-75^2

(キ) 222^2-221^2

(ク) $51\times 26^2-51\times 24^2$

◎ 数の計算の工夫（式の展開を利用して）

例２．工夫して，次の計算をしましょう。

$$
\begin{aligned}
&203\times 197\\
&=(200+3)\times(200-3)\\
&=200^2-3^2\\
&=40000-9\\
&=39991
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a+b)\\
&=a^2-b^2
\end{aligned}
$$

そのまま普通に計算をせずに、数をわざと２数の和と同じ２数の差に分けた後に
式の展開をしてから計算すると、簡単になるときがあります。
かける２数の真ん中の数が、２乗の計算がやりやすい数字になる場合は有効な方法です。

普通に計算すると

$$
\begin{array}{r}
203\\
\times\ 197\\
\hline
1421\\
1827\\
203\\
\hline
39991
\end{array}
$$

大変ですね。やりたくないですね。そろばんが得意なら

問２．工夫して、次の計算をしましょう。

(ｱ)　41×39　　　(ｲ)　102×98

(ｳ)　49×51　　　(ｴ)　77×83

例３．工夫して，次の計算をしましょう。

$$
\begin{aligned}
41^2&=(40+1)^2\\
&=40^2+2\times 40\times 1+1^2\\
&=1600+80+1\\
&=1681
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2\\
&=a^2+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

そのまま普通に計算をせずに、数をわざと２数の和や差に分けた後に
式の展開をしてから計算すると、簡単になるときがあります。
分けた２数が、ともに２乗の計算がやりやすい数字になる場合は有効な方法です。

普通に計算すると

$$\begin{array}{r} 41 \\ \times\quad 41 \\ \hline 41 \\ 164 \\ \hline 1681 \end{array}$$

この程度の数だと、普通に計算しても変わりがないかな

問３．工夫して、次の計算をしましょう。

(ｱ)　101^2　　　(ｲ)　99^2

(ｳ)　199^2　　　(ｴ)　102^2

◎ (ｱ)(ｲ) 式の文字に数を代入して，式の値を求める
◎ (ｳ)　　式の展開をして，同類項を整理してから代入する
◎ (ｴ)　　式を因数分解してから代入する

例４．$a=3$，$b=-2$のとき，次の式の値を求めましょう。

（復習）式の中の文字を数字を置き換えることを，文字にその数を代入するといいます。
代入して計算した結果を，そのときの式の値といいます。

(ｱ) $2a+b$
$=2\times3+(-2)$
$=6-2$
$=4$

(ｲ) $-a-3b$
$=-3-3\times(-2)$
$=-3+6$
$=3$

(ｳ) $a(a+2b)-a(a-b)$
$=a^2+2ab-a^2+ab$
$=3ab$
$=3\times3\times(-2)$
$=-18$

(ｴ) $a^2+2ab+b^2$
$=(a+b)^2$
$=(3-2)^2$
$=1^2$
$=1$

文字は，どんな値になるかは決まっていません。問題によって，あるいは内容によって入る値が決まります。この問題では，特定の指示された値を文字に代入したときの，文字式の値を求めることを問われています。

問４．次の式の値を求めましょう。

(ｱ) $a=-4$のとき，$1-2a$ の値

(ｲ) $a=-3$，$b=5$のとき，$a^2+2ab+b^2$ の式の値

(ｳ) $a=5$，$b=\frac{7}{3}$のとき，$a^2-6ab+9b^2$ の式の値

(ｴ) $x=2$，$y=15$のとき，$(4y-x)(4y+x)+(x-2y)(x+8y)$ の式の値

(ｵ) $a=-2$，$b=\frac{1}{3}$ のとき，$(a-b)^2+2ab$ の式の値

解答：

問１.

(ｱ) 1324^2-1323^2
$=(1324+1323)(1324-1323)$
$=2647\times 1$
$=2647$

(ｲ) 76^2-24^2
$=(76+24)(76-24)$
$=100\times 52$
$=5200$

(ｳ) 4321^2-4320^2
$=(4321+4320)(4321-4320)$
$=8641\times 1$
$=8641$

(ｴ) 101^2-99^2
$=(101+99)(101-99)$
$=200\times 2$
$=400$

(ｵ) 113^2-13^2
$=(113+13)(113-13)$
$=126\times 100$
$=12600$

(ｶ) 125^2-75^2
$=(125+75)(125-75)$
$=200\times 50$
$=10000$

(ｷ) 222^2-221^2
$=(222+221)(222-221)$
$=443\times 1$
$=443$

(ｸ) $51\times 26^2-51\times 24^2$
$=51(26+24)(26-24)$
$=51\times 50\times 2$
$=51\times 100$
$=5100$

問２.

(ｱ) 41×39
$=(40+1)(40-1)$
$=1600-1$
$=1599$

(ｲ) 102×98
$=(100+2)(100-2)$
$=10000-4$
$=9996$

(ｳ) 49×51
$=(50-1)(50+1)$
$=2500-1$
$=2499$

(ｴ) 77×83
$=(80-3)\times(80+3)$
$=6400-9$
$=6391$

問３.

(ｱ) 101^2
$=(100+1)^2$
$=10000+200+1$
$=10201$

(ｲ) 99^2
$=(100-1)^2$
$=10000-200+1$
$=9801$

(ｳ) 199^2
$=(200-1)^2$
$=40000-400+1$
$=39601$

(ｴ) 102^2
$=(100+2)$
$=10000+400+4$
$=10404$

問４．

(ｱ) $a=-4$のとき，$1-2a$ の値

$=1-2\times(-4)$

$=1+8$

$=9$

(ｲ) $a=-3$，$b=5$のとき，$a^2+2ab+b^2$ の式の値。

$=(a+b)^2$

$=(-3+5)^2$

$=2^2$

$=4$

(ｳ) $a=5$，$b=\frac{7}{3}$ のとき，$a^2-6ab+9b^2$ の式の値

$=(a-3b)^2$

$=(5-7)^2$

$=(-2)^2$

$=4$

(ｴ) $x=2$，$y=15$のとき，$(4y-x)(4y+x)+(x-2y)(x+8y)$ の式の値

$=16y^2-x^2+x^2+6xy-16y^2$

$=6xy$

$=6\times2\times15$

$=6\times30$

$=180$

(ｵ) $a=-2$，$b=\frac{1}{3}$ のとき，$(a-b)^2+2ab$ の式の値

$=a^2-2ab+b^2+2ab$

$=a^2+b^2$

$=4+\frac{1}{9}$

$=\frac{37}{9}$

◎ 式の展開や因数分解を証明に利用する

例５．連続した２つの整数の２乗の差は，いつも必ず同じ結果になります。
文字で表してどうなるかを調べてみましょう。

たとえば：1235^2-1234^2 ，356^2-355^2 ，19^2-18^2

＜証明の手順＞

① 文字を使って，証明に必要な数を表します。
② ①で指定した文字を使って，内容を式で表します。
③ ②の式を展開したり，因数分解したりして結果が分かる式にまとめます。
④ 結論を文章で表します。

＜実際にやってみましょう＞

① 整数 n を使って，連続した２つの整数を n，$n+1$ と表します。
② 大きい整数の２乗と小さい整数の２乗の差を式で表すと， $(n+1)^2-n^2$
③ $(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2$
$= 2n+1$
$= n+(n+1)$
④ n と $n+1$ は，連続した２つの整数なので，
連続した２つの整数の２乗の差は，連続した２つの整数の和に等しくなります。

問５．連続した２つの偶数の積に１を足した数は奇数の２乗になることを証明しましょう。

連続した偶数	2	4	6	8	10	12
２つの偶数の積は	8	24	48	80	____	
積に１を足すと	9	25	49	____	____	

① 文字を使って，証明に必要な数を表します。
連続した２つの偶数は，整数 n を使って ________ ，____________ と表される。

② ①で指定した文字を使って，内容を式で表します。
それらの積に１を足した数は，________________

③ 式を展開したり，因数分解したりして結果が分かる式にまとめます。

④ 結論を文章で表します。

問６．連続した２つの奇数の積に１をたした数は、偶数の２乗になることを証明しましょう。

＜証明＞

① 文字を使って，証明に必要な数を表します

連続した２つの奇数は，整数 n を使って ＿＿＿＿＿＿ ，＿＿＿＿＿＿と表される

② ①で指定した文字を使って，内容を式で表します

それらの積に１を足した数は，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

③ 式を展開したり，因数分解したりして結果が分かる式にまとめます

④ 結論を文章で表します。

問７．連続する２つの奇数の２乗の差は,必ず８の倍数になることを証明しましょう。

① 連続した２つの奇数は，整数 n を使って＿＿＿＿＿＿ ，＿＿＿＿＿＿ と表される。

②

③

④ ＿＿＿＿＿は整数なので，＿＿＿＿＿＿＿は，8の倍数になります。

したがって，

◎ 文字を使って表す（n を整数として表して下さい）

問８．次の数を整数 n を使って表しましょう。

①　連続する２つの整数 ②　連続する３つの整数	
③　偶数(２の倍数)	
④　奇数(２で割るとＩ余る)	
⑤　３の倍数	
⑥　３で割るとＩ余る数	
⑦　５の倍数	
⑧　５で割ると２余る数	
⑨　連続した２つの偶数	
⑩　連続した３つの偶数	
⑪　連続した２つの奇数	
⑫　連続した３つの奇数	

解答：

問５．連続した２つの偶数の積に１を足した数は奇数の２乗になることを証明しましょう。

連続した偶数	2	4	6	8	10	12
２つの偶数の積は	8	24	48	80	120	
積に１を足すと	9	25	49	81	121	

① 文字を使って，証明に必要な数を表す。
連続した２つの偶数は，整数 n を使って $2n$ ，$2n+2$ と表される。

② ①で指定した文字を使って，内容を式で表す。
それらの積に１を足した数は，$2n(2n+2)+1$

③ 式を展開したり，因数分解したりして結果が分かる式にまとめます。

$$
\begin{aligned}
&2n(2n+2)+1\\
&=4n^2+4n+1\\
&=(2n+1)^2
\end{aligned}
$$

④ 結論を文章で表します。
$2n+1$は奇数なので，連続した２つの偶数の積に１を足した数は奇数の２乗になる。

問６．連続した２つの奇数の積に１をたした数は、偶数の２乗になることを証明しましょう。

＜証明＞

① 文字を使って，証明に必要な数を表します
連続した２つの奇数は，整数 n を使って $2n+1$ ，$2n+3$ と表される

② ①で指定した文字を使って，内容を式で表します
それらの積に１を足した数は，$(2n+1)(2n+3)+1$

③ 式を展開したり，因数分解したりして結果が分かる式にまとめます

$$
\begin{aligned}
(2n+1)(2n+3)+1&=4n^2+8n+3+1\\
&=4n^2+8n+4\\
&=(2n+2)^2
\end{aligned}
$$

④ 結論を文章で表します。

$2n+2$は偶数なので，連続した２つの奇数の積に１を足した数は偶数の２乗になる。

(注)純粋な因数分解の答えなら$(2n+2)^2$ は×ですが，
偶数の２乗を表したいので$(2n+2)^2$で○となります。
$\{2(n+1)\}^2$ でも偶数の２乗だと分かるので○です。

問７．連続する２つの奇数の２乗の差は,必ず８の倍数になることを証明しましょう。

① 連続した２つの奇数は，整数 n を使って $2n+1$ ， $2n+3$ と表される。

② 連続する２つの奇数の２乗の差は， $(2n+3)^2-(2n+1)^2$

③ $(2n+3)^2-(2n+1)^2=4n^2+12n+9-(4n^2+4n+1)$
$=4n^2+12n+9-4n^2-4n-1$
$=8n+8$
$=8(n+1)$

④ $n+1$ は整数なので， $8(n+1)$ は，8の倍数になります。
したがって，連続する２つの奇数の２乗の差は,８の倍数である。

(注)①②③④は整理するためで，テスト時は不要です。

◎ 文字を使って表す（n を整数として表して下さい）

問８．(注) 代表的な答えのみが書いてあります。

① 連続する２つの整数	n，$n+1$	
② 連続する３つの整数	n，$n+1$，$n+2$	$n-1$，n，$n+1$
③ 偶数(２の倍数)	$2n$	
④ 奇数(２で割ると１余る)	$2n+1$	$2n-1$
⑤ ３の倍数	$3n$	
⑥ ３で割ると１余る数	$3n+1$	$3n-2$
⑦ ５の倍数	$5n$	
⑧ ５で割ると２余る数	$5n+2$	$5n-3$
⑨ 連続した２つの偶数	$2n$，$2n+2$	
⑩ 連続した３つの偶数	$2n$，$2n+2$，$2n+4$	$2n-2$，$2n$，$2n+2$
⑪ 連続した２つの奇数	$2n+1$，$2n+3$	
⑫ 連続した３つの奇数	$2n+1$，$2n+3$，$2n+5$	$2n-1$，$2n+1$，$2n+3$