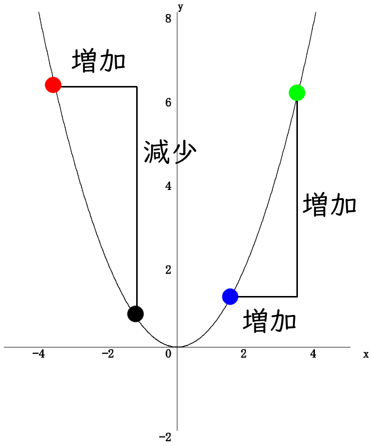
3　関数 $y = ax^2$ の値の増減と変域

◎ $y = ax^2$ のグラフについて，y の値の増減



$a > 0$のとき

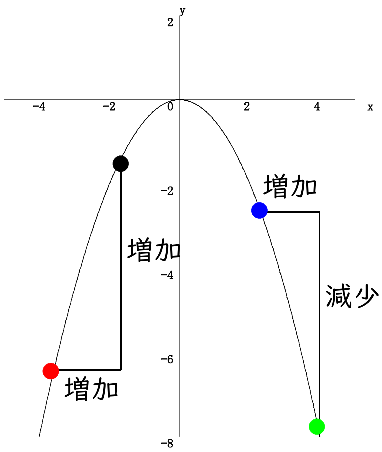
・x の値が増加していくとき
y の値は $x \leqq 0$の範囲では 減少 していく
$x \geqq 0$の範囲では増加 していく

・y の値は $x = 0$ の時，
$y = 0$となり，最小になる

・x がどんな値をとっても，
$y \geqq 0$である

・点●から点●へ変化したときには，x の値が　増加 している
y の値は 減少 している

・点●から点●へ変化したときには，x の値が　増加 している
y の値も 増加 している



$a < 0$のとき

・x の値が増加していくとき
y の値は $x \leqq 0$の範囲では 増加 していく
$x \geqq 0$の範囲では 減少 していく

・y の値は $x = 0$ の時，
$y = 0$となり，最大になる

・x がどんな値をとっても，
$y \leqq 0$である

・点●から点●へ変化したときには，x の値が　増加 している
y の値も 増加 している

・点●から点●へ変化したときには，x の値が　増加 している
y の値は 減少 している

◎ （復習）変域を，不等号を使って表す　（復習）変域を，数直線上に表す

変数がとる値の範囲を、その変数の（ 変域 ）といいます。

問１．次の問いで、x の変域を不等号を使って表し、また数直線上でも表しなさい。

(ｱ) 変数 x のとる値が，　0以上20以下
不等号を使って
数直線上で

(ｲ) 変数 x のとる値が，10以上30未満
不等号を使って
数直線上で

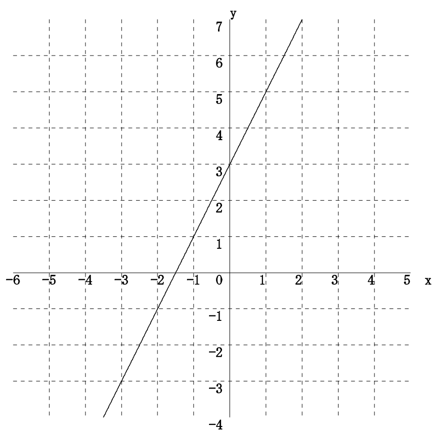
(ｳ) 変数 x のとる値が，12から50まで
不等号を使って
数直線上で

(ｴ) 変数 x のとる値が，−5より大きく20より小さい
不等号を使って
数直線上で

◎ x の変域から y の変域を求める

問２．(復習)(ｱ) 関数 $y = 2x + 3$（$-2 \leqq x \leqq 1$）の y の変域を求めなさい。

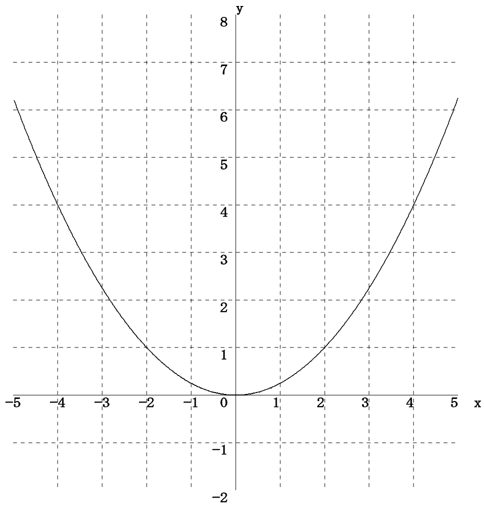
x	−2	−1	0	1
y				



(ｲ) 関数 $y = -2x + 3$（$-2 \leqq x \leqq 1$）の y の変域を求めなさい。

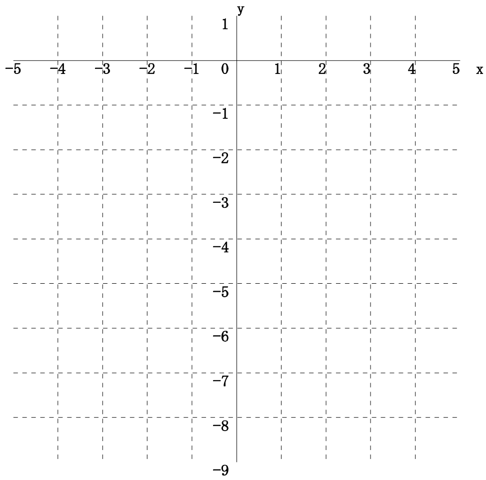
問３．(ｱ) 関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ （－２≦ x ≦４）の y の変域を求めなさい。

x	－２	０	２	４
y				



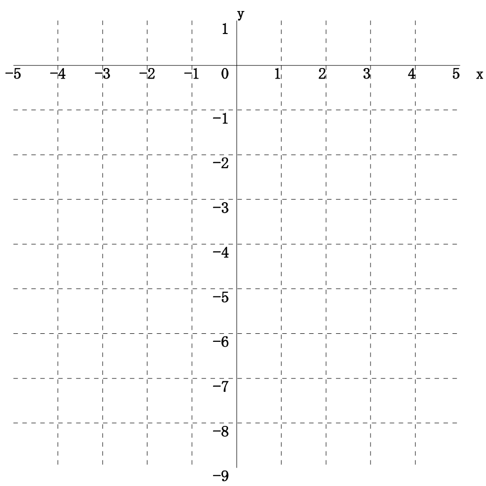
(ｲ) 関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ （－４≦ x ≦２）の y の変域を求めなさい。

x	－４	－２	０	２
y				



(ｳ) 関数 $y=-\dfrac{1}{4}x^2$ （－４≦ x ≦－２）の y の変域を求めなさい。

x	－４	－２		
y				



解答：問１～問３

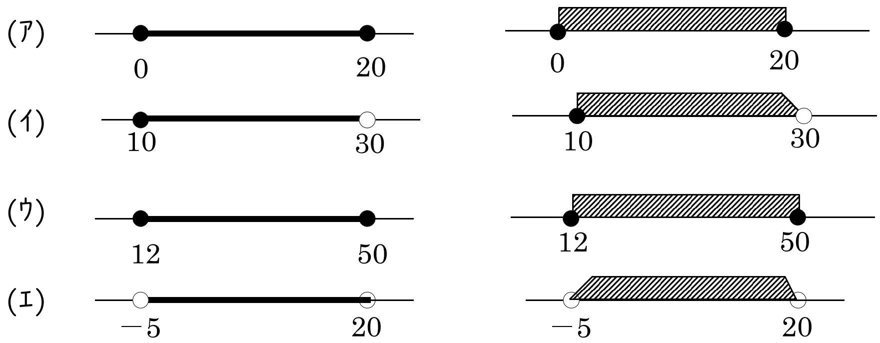
問１．不等号を使って表すと

(ｱ)　$0 \leqq x \leqq 20$　　　(ｲ)　$10 \leqq x < 30$

(ｳ)　$12 \leqq x \leqq 50$　　　(ｴ)　$-5 < x < 20$

数直線を使って表すと

中学校の教科書には　　　　高等学校の教科書では



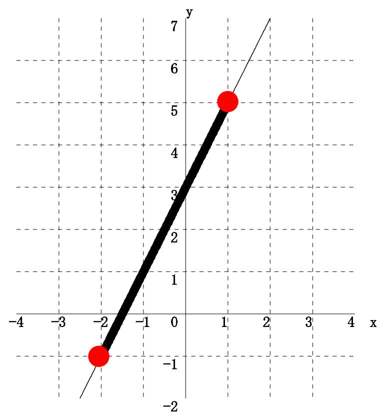
高校では連立不等式を学習するので、平面では表すことができない

上に伸ばすことによって、２種類以上の変域を表すことができる

問２．(復習)(ｱ) 関数 $y = 2x + 3$（$-2 \leqq x \leqq 1$）の y の変域を求めなさい。

x	－２	－１	０	１
y	－１	１	３	５

最小値　　　　　　最大値



y の変域は　　$-1 \leqq y \leqq 5$

(ｲ) 関数 $y = -2x + 3$（$-2 \leqq x \leqq 1$）では、

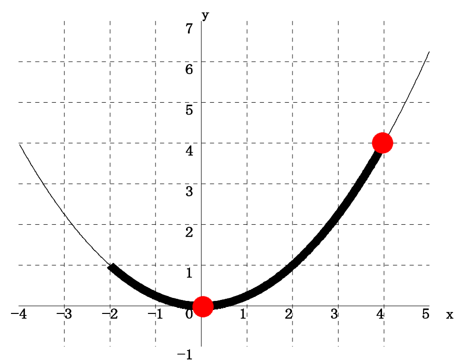
傾きが右下がりなので、y の値は、$x = -2$ のとき最大、$x = 1$ のとき最小になる

y の変域は　$1 \leqq y \leqq 7$　　　（注）１と７を逆に書かないように

問３．(ｱ) 関数 $y = \frac{1}{4}x^2$　（$-2 \leqq x \leqq 4$）の y の変域を求めなさい。

x	－２	０	２	４
y	１	０	１	４

最小値　　　　最大値



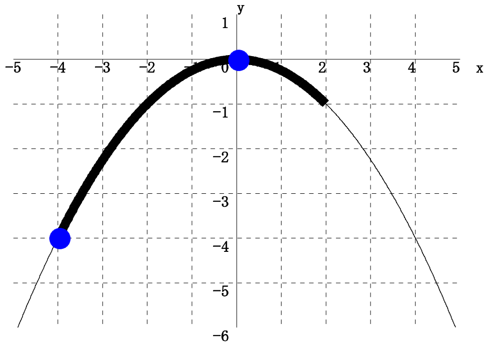
y の変域は　　$0 \leqq y \leqq 4$

$x = 0$をまたぐときは要注意です

(ｲ) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ （$-4\leqq x\leqq 2$）の y の変域を求めなさい。

x	-4	-2	0	2
y	-4	-1	0	1

最小値　　　　最大値

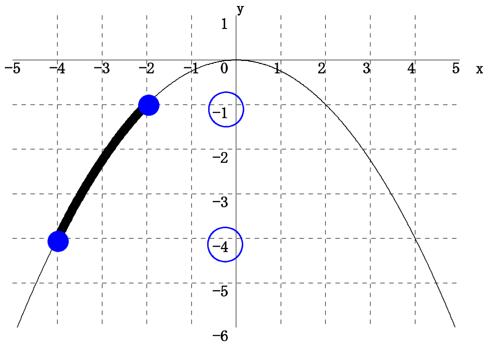


y の変域は　　$-4\leqq y\leqq 0$

原点をまたいで y の値の増加と減少が入れ替わるので要注意

(ｳ) 関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ （$-4\leqq x\leqq -2$）の y の変域を求めなさい。

x	-4	-2		
y	-4	-1		



原点をまたいでいないので
両端が最大値と最小値になる

y の変域は　　$-4\leqq y\leqq -1$

4．関数 $y = ax^2$ の変化の割合

◎（復習）変化の割合

x の増加量に対する y の増加量の割合を 変化の割合 といいます。

この内容を分数で表すと、変化の割合 $= \dfrac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$ となります。

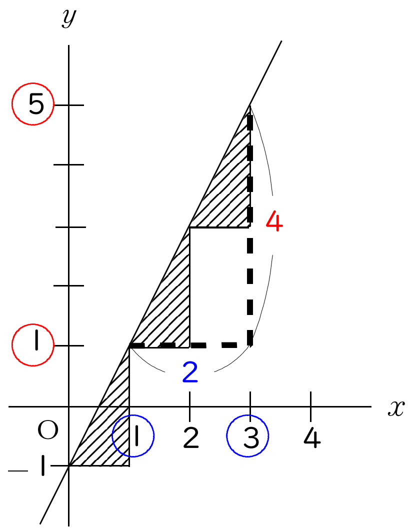
この値は，y の増加量が x の増加量の何倍であるかを表しています。
言い換えると、x の増加量が1のときの y の増加量の値を表しています。

例１．$y = 2x - 1$ について、x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合は？

x の増加量 $\boxed{2}$

x の値	0	1	2	3	4
y の値	－1	1	3	5	7

y の増加量 $\boxed{4}$



変化の割合＝ $\dfrac{4}{2} = 2$

変化の割合が「２」ということは、x の増加量が1のとき、y の増加量が２ということです

この内容を「1ッコイッテ 2アガル」と表していきます

また，この値「2」は、グラフでは、直線 $y = 2x - 1$ の（ 傾き ）になっていました。

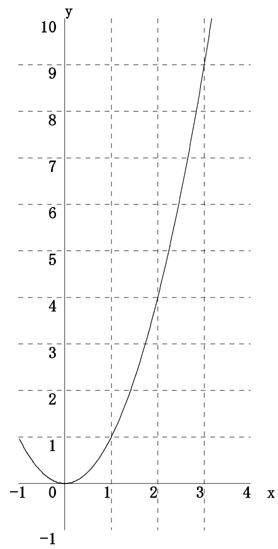
一次関数 $y = ax + b$ では，変化の割合は（ a ）で，
x の係数（ a ）に等しくなり，つねに（ 一定 ）になります。

◎ 関数 $y = ax^2$ の変化の割合

例２．$y = x^2$ について，x の値が 次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(ｱ) x の値が 1 から 2 まで増加するときの変化の割合
(ｲ) x の値が 2 から 3 まで増加するときの変化の割合
(ｳ) x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合
(ｴ) x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合

x の値	0	1	2	3	4	5
y の値	0	1	4	9	16	25



(ｱ) x の値が 1 から 2 まで増加するときの変化の割合 $=\dfrac{3}{1}=3$

(ｲ) x の値が 2 から 3 まで増加するときの変化の割合 $=\dfrac{5}{1}=5$

(ｳ) x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合 $=\dfrac{8}{2}=4$

(ｴ) x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合 $=\dfrac{21}{3}=7$

中学数学で、「変化の割合」と呼んでいたものを、高校数学では「平均変化率」といいます。

問２．$y=2x^2$ について、x の値が 次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(ｱ)　3から5まで

x	3	5
y		

(ｲ)　−4から−2まで

x	−4	−2
y		

(ｳ)　2から4まで

x	2	4
y		

問３．$y=-x^2$ について、x の値が 次のように増加するときの変化の割合を求めなさい。

(ｱ)　1から4まで

x	1	4
y		

(ｲ)　−4から−1まで

x	−4	−1
y		

関数 $y=ax^2$ の変化の割合は、一次関数とは異なり、（　一定　）ではありません。

解答：問２，問３

(ｱ)

2

x	3	5
y	18	50

32

$$\frac{32}{2} = 16$$

(ｲ)

2

x	-4	-2
y	32	8

-24

$$\frac{-24}{2} = -12$$

(ｳ)

x	2	4
y		

(ｲ)から変化の割合は12

グラフは y 軸について対称であるので、(ｲ)と(ｳ)の y の増加量は絶対値が同じで符号が逆になる。$x>0$の範囲では、y の増加量は増加になるので変化の割合は12

(ｱ)

3

x	1	4
y	-1	-16

-15

x の増加量は3
y の増加量は-15
変化の割合は-5

(ｲ)

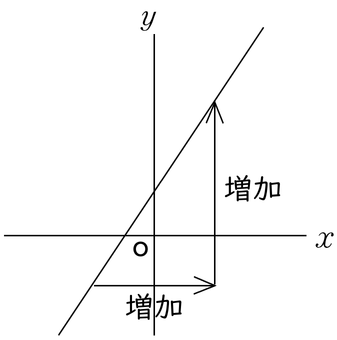
x	-4	-1
y		

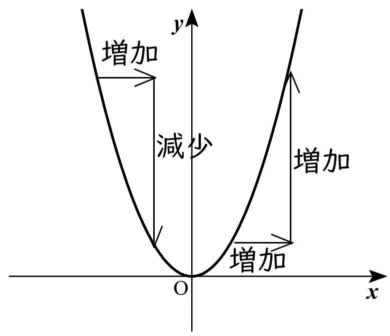
(ｱ)を参考にして計算しないで5

◎　一次関数 $y=ax+b$ と(二次)関数 $y=ax^2$ の比較

	一次関数　$y=ax+b$	（二次）関数 $y=ax^2$
グラフの形	直線	放物線
変化の割合	一定で a に等しい	一定ではない

$a>0$のとき　x の値が増加するときの，y の値の増減



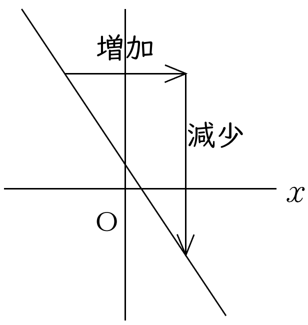


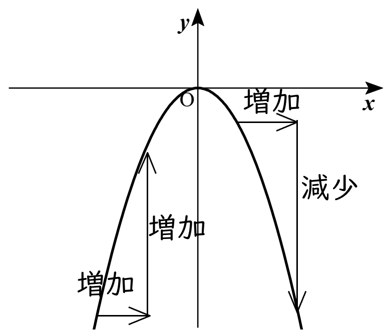
y の値も（ 増加 ）する

（ 右上がり ）の直線となる

$x<0$のとき、y の値は（減少 ）する
$x>0$のとき、y の値は（増加 ）する
$x=0$のとき、y の値は（最小 ）となる

$a<0$のとき　x の値が増加するときの，y の値の増減





y の値は（ 減少 ）する

（ 右下がり ）の直線となる

$x<0$のとき、y の値は（増加 ）する
$x>0$のとき、y の値は（減少 ）する
$x=0$のとき、y の値は（最大 ）となる

◎ 一次関数においての変化の割合を文字で解く

$y = ax + b$ において、x の値が m から n まで増加するときの変化の割合を文字で解くと

x	m	n
y	$am + b$	$an + b$

$$変化の割合 = \frac{yの増加量}{xの増加量} = \frac{an+b-(am+b)}{n-m}$$
$$= \frac{an+b-am-b}{n-m}$$
$$= \frac{an-am}{n-m}$$
$$= \frac{a\cancel{(n-m)}}{\cancel{n-m}}$$
$$= a$$

必ず a という値（一定）になることが分かる

◎ （二次）関数においての変化の割合を文字で解く

$y = ax^2$ において、x の値が m から n まで増加するときの変化の割合を文字で解くと

x	m	n
y	am^2	an^2

$$変化の割合 = \frac{yの増加量}{xの増加量} = \frac{an^2-am^2}{n-m}$$
$$= \frac{a(n^2-m^2)}{n-m}$$
$$= \frac{a\cancel{(n-m)}(n+m)}{\cancel{n-m}} = a(n+m)$$

なお、この公式は二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ では成り立ちません。
中学校でのみ使える公式ですので覚えておいて下さい。

問４．次の関数で、x の値が2から5まで増加するときの変化の割合を公式を使って求めましょう。

(ｱ)　$y = -5x + 9$　　(ｲ)　$y = 3x^2$　　(ｳ)　$y = -2x^2$

解答：問４

(ｱ) 一次関数の変化の割合は，一定なので　-5

(ｲ) $(2+5)\times 3 = 21$　　(ｳ) $(2+5)\times(-2) = -14$

復習問題(入試問題より)

問１．次の各問いをノートに解きましょう。

(ｱ) y は x の 2 乗に比例し，$x=-5$ のとき $y=10$ です。この時， y を x の式で表しなさい。

(ｲ) y は x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき $y=-18$。$x=-2$ のときの y の値を求めなさい。

(ｳ) 関数 $y=2x^2$ について，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めなさい。

(ｴ) 関数 $y=ax^2$ （a は定数）について，$x=2$ のとき，$y=-12$ です。
x の変域が $-1 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域を求めなさい。

(ｵ) 関数 $y=2x^2$ について， x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(ｶ) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合は 28 でした。
このとき， a の値を求めなさい。

(ｷ) y が x の 2 乗に比例し，x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が -6 である
ような関数の式を求めなさい。

(ｸ) 関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ について，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(ｹ) 関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域は $a \leqq y \leqq b$ である。
このとき，a，b の値を求めなさい。

(ｺ) 関数 $y=-x^2$ について、x の変域が $-3 \leqq x \leqq a$ のとき、y の変域が $-16 \leqq y \leqq b$ で
ある。このとき、a，b の値を求めなさい。

(ｻ) x の値が 2 から 4 まで増加するとき、２つの関数 $y=ax^2$ と $y=5x$ の変化の割合が等し
くなるような a の値を求めなさい。

(ｼ) 関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域は $b \leqq y \leqq 4$ である。
このとき，a，b の値をそれぞれ求めなさい。

解答：問Ⅰ.

(ｱ) y は x の 2 乗に比例し，$x=-5$ のとき $y=10$ です。この時，y を x の式で

y は x の 2 乗に比例するので，$y=ax^2$ と表される。

この式に $x=-5$，$y=10$ を代入して、$10=25a$　　$a=\dfrac{2}{5}$　　答え　$y=\dfrac{2}{5}x^2$

(ｲ) y は x の 2 乗に比例し，$x=3$ のとき $y=-18$。$x=-2$ のときの y の値

y は x の 2 乗に比例するので，$y=ax^2$ の関係になる。
この式に $x=3$，$y=-18$ を代入して　$-18=9a$　　$a=-2$
式が $y=-2x^2$ と分かったので　この式に $x=-2$ を代入して　$y=-8$　答え　$y=-8$

(ｳ) 関数 $y=2x^2$ について，x の変域が $-1\leqq x\leqq 2$ のとき，y の変域

$x=0$ の時の y の値が最小(値)になる

x	-1	0	2
y	2	0	8

答え　$0\leqq y\leqq 8$

(ｴ) 関数 $y=ax^2$，$x=2$ のとき，$y=-12$。x の変域が $-1\leqq x\leqq 4$ のとき，y の変域

$x=2$，$y=-12$ から，まず式を求める。$y=ax^2$ に代入して，$-12=4a$　　$a=-3$
$y=-3x^2$ で，x の変域が $-1\leqq x\leqq 4$ とすると，$x=0$ の時の y の値が最大(値)になる

x	-1	0	4
y	-3	0	-48

答え　$-48\leqq y\leqq 0$

(ｵ) 関数 $y=2x^2$ について，x の値が 1 から 3 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

公式を使って　$(1+3)\times 2=8$　　変化の割合は 8

(ｶ) 関数 $y=ax^2$，x の値が 2 から 5 まで増加するときの変化の割合は 28。a の値

公式を使って変化の割合を表すと　$(2+5)\times a=7a$　　$7a=28$　　$a=4$

(ｷ) y が x の 2 乗に比例，x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が -6 の式

公式を使って変化の割合を表すと　$(3+6)\times a=9a$

$9a=-6$　　$a=-\dfrac{2}{3}$　　関数の式は $y=-\dfrac{2}{3}x^2$

(ｸ) 関数 $y=-\dfrac{1}{2}x^2$について，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

公式を使って$(2+4)\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-3$　変化の割合は-3

(ｹ) 関数 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$，x の変域が $-2\leqq x\leqq 3$ のとき，y の変域は $a\leqq y\leqq b$。a，b の値。

y の最大値は，$x=0$ のときで，$y=0$
y の最小値は，$x=3$ のときで，$y=-3$
y の変域は $a\leqq y\leqq b$ であるので，$a=-3$，$b=0$

(ｺ) 関数 $y=-x^2$、x の変域が $-3\leqq x\leqq a$ のとき、y の変域が $-16\leqq y\leqq b$。a，b の値。

y の最大値は，$x=0$ のときで，$y=0$
$x=-3$ のときは，$y=-9$ となり、y の最小値 -16 にはならない
y の最小値が -16 になるためには，$a=4$ が必要　　　　したがって，$a=4$，$b=0$

(ｻ) x の値が 2 から 4 まで増加する、関数 $y=ax^2$ と $y=5x$ の変化の割合が等しい時の a の値

$y=ax^2$ の変化の割合は，$(2+4)\times a=6a$
$y=5x$ の変化の割合は，一定なので 5
これが等しくなるためには，$6a=5$　　$a=\dfrac{5}{6}$

(ｼ) 関数 $y=ax^2$，x の変域が $-3\leqq x\leqq 2$，y の変域は $b\leqq y\leqq 4$。このとき，a，b の値。

x の変域が負の値から正の値までなので，最小値か最大値が 0 になる。
y の最大値が 4 となっているので，最小値が 0 となり $b=0$
$y=4$ となるときの x の値は y 軸からより離れている -3
$y=ax^2$ に，$x=-3$，$y=4$ を代入して $4=9a$　$a=\dfrac{4}{9}$