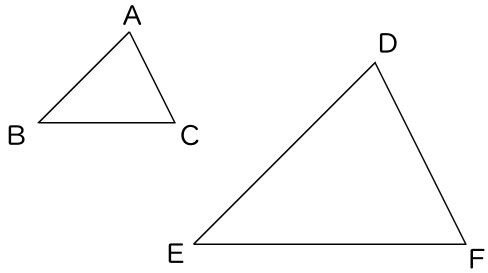
2　三角形の相似条件

２つの三角形△ＡＢＣ，△ＤＥＦについて

∠Ｄ＝∠Ａ，∠Ｅ＝∠Ｂ，∠Ｆ＝∠Ｃ

$\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{FD}{CA}$　が成り立つならば、

この２つの三角形は相似であるといえる。

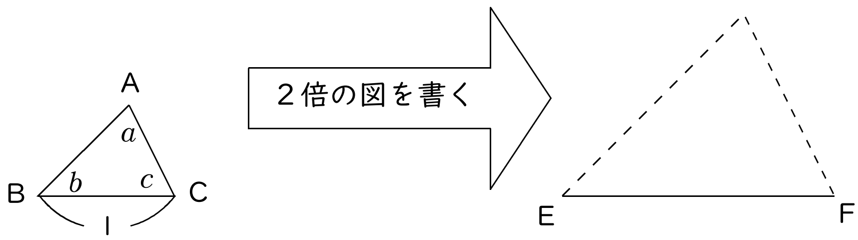


◎：相似比がｌ：２となる図形を書く

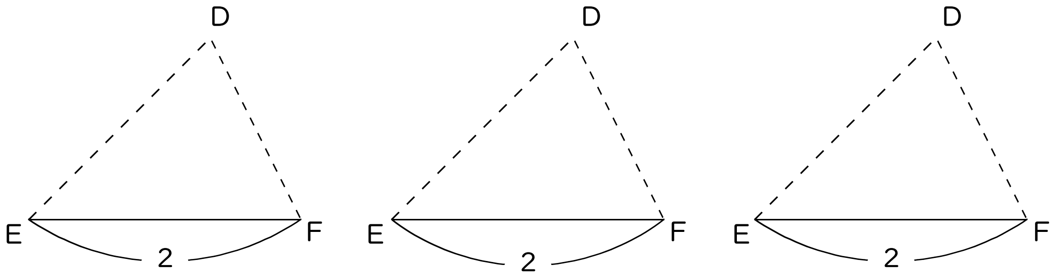
△ABCの2倍の拡大図を書くには

① 線分をまずｌ本書かないと始まらないので
まずBC：EF＝ｌ：2となるような線分EFを書く

② 線分をｌ本書くと，２つの頂点E，Fが決定してしまうので
三角形を書くには，頂点Dの決定の仕方を考えれば良い



(ｱ)　(ｲ)　(ｳ)



◎：(復習)三角形の決定条件

三角形をかく方法は、３通りありました（**三角形の決定条件**）。

(ｱ)（　３つの辺の長さ　）を使って書く。

(ｲ)（　２つの辺の長さと、その間の角の大きさ　）を使って書く。

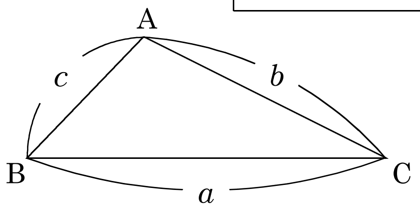
(ｳ)（　ｌつの辺の長さと、その両端の角の大きさ　）を使って書く。

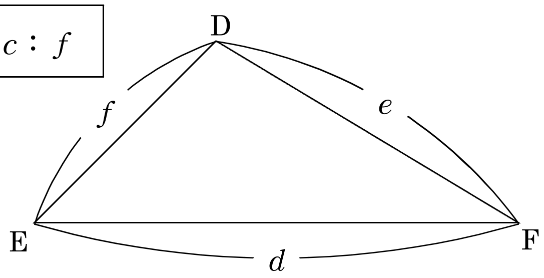
◎：三角形の相似条件

２つの三角形は，次の各場合に相似である。

(ｱ) （　3組の辺の比　）が，すべて等しいとき

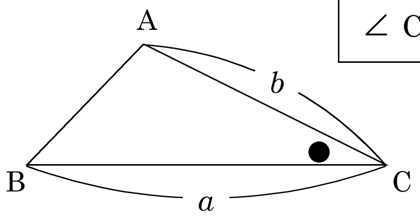
$a : d = b : e = c : f$

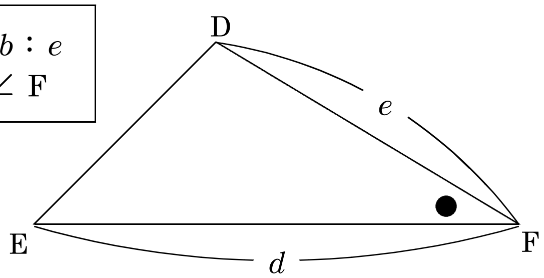




(ｲ) （　2組の辺の比と　その間の角　）が，それぞれ等しいとき

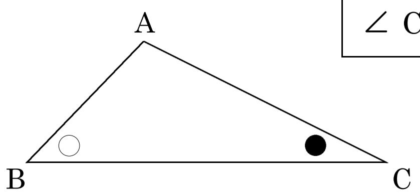
$a : d = b : e$
$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$

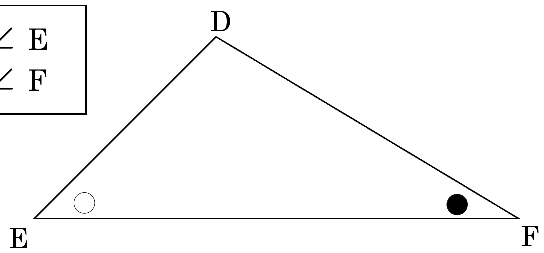




(ｳ) （　2組の角　）が，それぞれ等しいとき

$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$
$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$





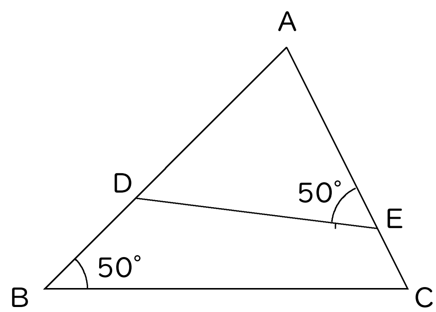
もちろん上記以外の組み合わせでも相似となる

(ｲ)　$a : d = c : f$　，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$　　(ｲ)　$b : e = c : f$　，$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D}$

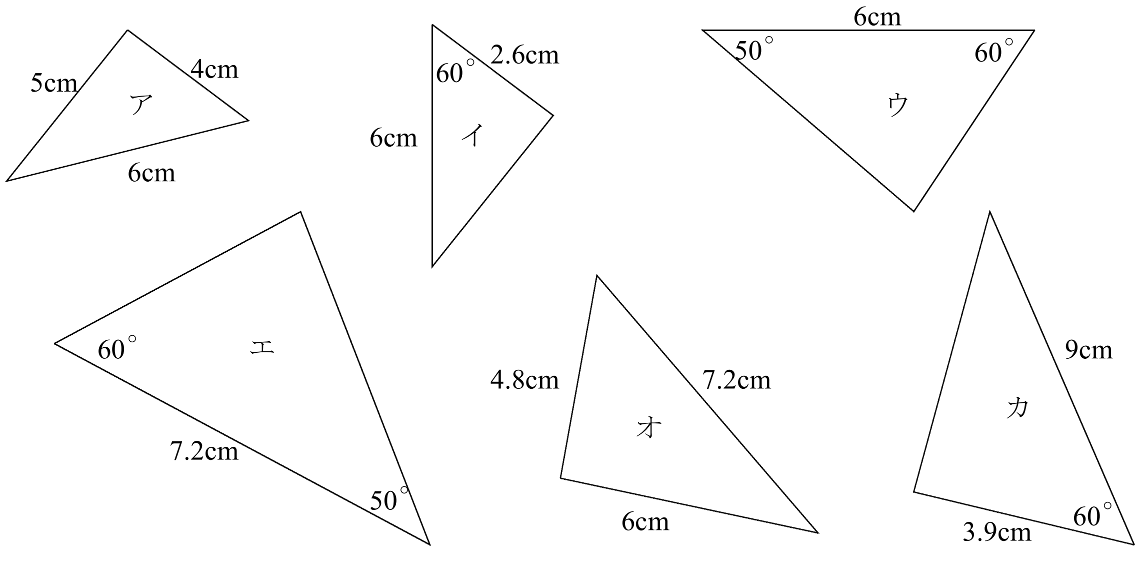
(ｳ)　$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D}$　，$\angle \mathrm{B} = \angle \mathrm{E}$　　(ｳ)　$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{D}$　，$\angle \mathrm{C} = \angle \mathrm{F}$

◎：三角形の相似条件より相似な図形を選ぶ
あてはまる相似条件を選ぶ

問Ｉ．右の図で、相似な三角形を記号∽を使って表しなさい。
　　また、その相似条件をいいなさい。
　　(頂点は，対応する順にあわせて書くこと。)



問２．下の図の三角形を、相似な三角形の組に分けなさい。
　また、相似比と相似条件をいいなさい。



（　　　）と（　　　）　　相似比は　　　：

相似条件～ --

（　　　）と（　　　）　　相似比は　　　：

相似条件～ --

（　　　）と（　　　）　　相似比は　　　：

相似条件～ --

問３．∠B＝∠Eである△ABCと△DEFで、AB＝6cm，BC＝4.5cm，DE＝10cm，EF＝7.5cmのとき、次の問いに答えなさい。

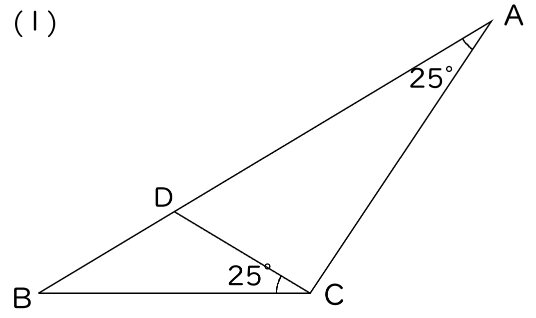
(ｱ) △ABC∽△DEFである理由を答えなさい。

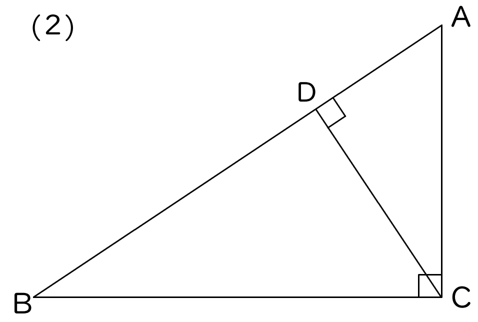
(ｲ) △ABCと△DEFの相似比を求めなさい。

(ｳ) AC＝9cmならば、DFの長さは何cmですか。

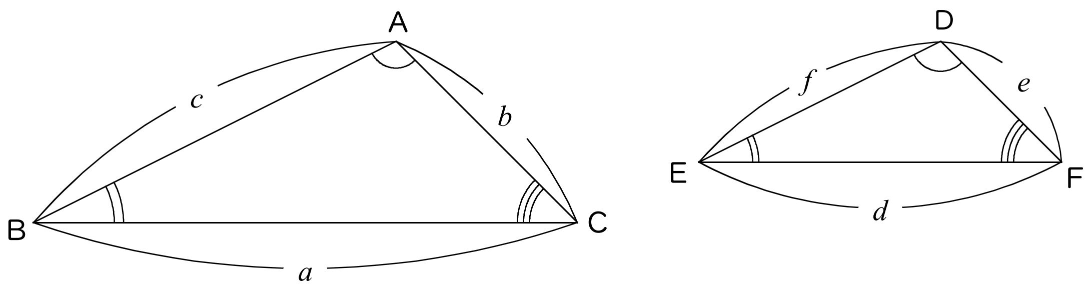
＜図を書いて考えよう＞

問４．下の図で、△ABCと相似な三角形を記号∽を使って表しなさい。





問５．△ABCと△DEFが相似になるためにはどんな条件が必要ですか。



(ｱ) ３組の辺の比がすべて等しくなることで、相似を証明するには、次の条件が必要です。

a ： d ＝ ： ＝ ：

(ｲ) ２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しくなることで、
相似を証明するには、次の条件が必要です。

① a：d ＝ c：f ∠B ＝∠E

②

③

(ｳ) ２組の角がそれぞれ等しくなることで、相似を証明するには、次の条件が必要です。

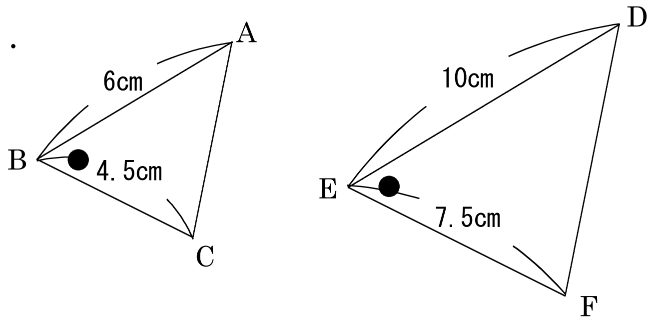
① ∠B ＝∠E ∠C ＝∠F

②

③

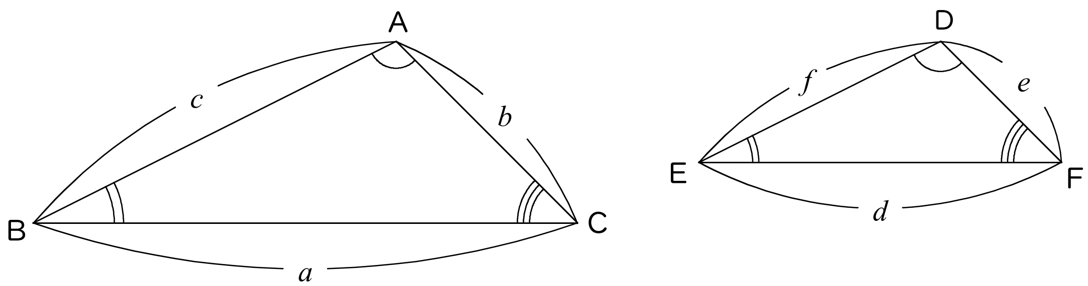
解答：問１～問５

問１．
　△ ABC ∽ △ AED　　相似条件：2組の角がそれぞれ等しい
問２．
（ア）と（オ）相似比２：１　3組の辺の比がすべて等しい
（イ）と（カ）相似比２：３　2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
（ウ）と（エ）相似比４：７　2組の角がそれぞれ等しい

問３．


(ｱ) 2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
(ｲ) △ABC：△DEF＝３：５
(ｳ) ３：５＝９：DF　右辺は左辺の3倍なので15cm
問４．
(ｱ) △ ABC ∽△ CBD
　∠ ABC ＝∠ CBD (共通)　∠ A ＝∠ BCD ＝25°
(ｲ) △ ABC ∽△ ACD
　∠ ABC ＝∠ ACD(共通)　∠ ACB ＝∠ ADC ＝90°
(ｱ), (ｲ)ともに2組の角がそれぞれ等しいので相似になる

問５．△ ABC と△ DEF が相似になるためにはどんな条件が必要ですか。



(ｱ) ３組の辺の比がすべて等しくなることで、相似を証明するには
　$a : d = b : e = c : f$

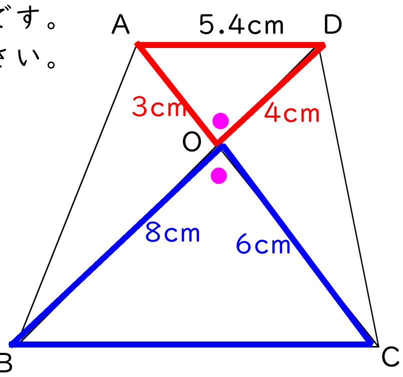
(ｲ) ２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しくなることで、相似を証明するには
① $a : d = c : f$　∠B＝∠E
② $a : d = b : e$　∠C＝∠F
③ $b : e = c : f$　∠A＝∠D

(ｳ) ２組の角がそれぞれ等しくなることで、相似が証明できるには、次の条件が必要です。
①　∠B＝∠E　∠C＝∠F
②　∠B＝∠E　∠A＝∠D
③　∠A＝∠D　∠C＝∠F

３　相似条件と証明

◎：三角形の相似条件を使って，図形の性質を証明することができる。

例１．右図の四角形ＡＢＣＤで、点ＯはＡＣ，ＢＤの交点です。
　　このとき、△ＯＡＤ∽△ＯＣＢであることを証明しなさい。
　　また、ＢＣの長さを求めなさい。



△OADと△OCBにおいて

AO：CO＝3：6＝1：2

DO：BO＝4：8＝1：2

よって，AO：CO＝DO：BO　…　①

対頂角は等しいので、　∠AOD＝∠COB　…　②

①，②より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので　△OAD∽△OCB

BCに対応する辺は、AD＝5.4cmなので、

1：2＝5.4：BC　　BC ＝ 10.8　　10.8cm

比例式で求めるときは、**ナカナカ♪ソトソト♪**でしたね
あるいは、２倍だからでも構いません

問１．右の図の△ＡＢＣで、頂点Ｂ，Ｃから、それぞれ、ＡＣ，ＡＢに垂線ＢＤ，ＣＥをひく。
　このとき、△ＡＢＤ∽△ＡＣＥであることを証明しなさい。

（　　　　　）と（　　　　　）において

ＢＤ⊥ＡＣ，ＣＥ⊥ＡＢだから、

∠（　　　　）＝９０°

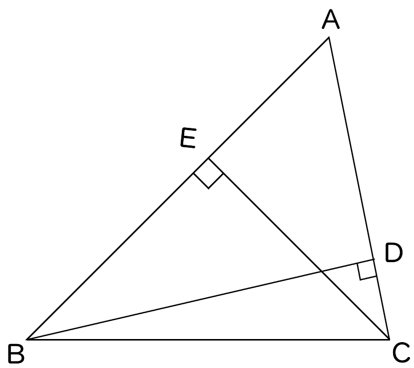
∠（　　　　）＝９０°

したがって　　　∠ＡＤＢ＝∠（　　　　）　…　①

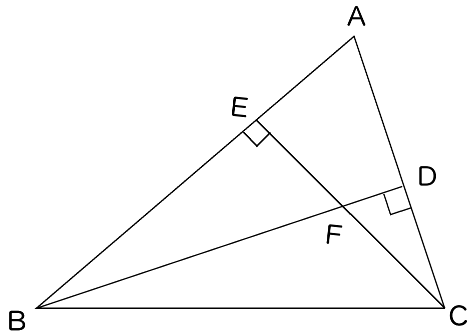
共通な角なので　∠ＢＡＤ＝∠（　　　　）　…　②

①②より、

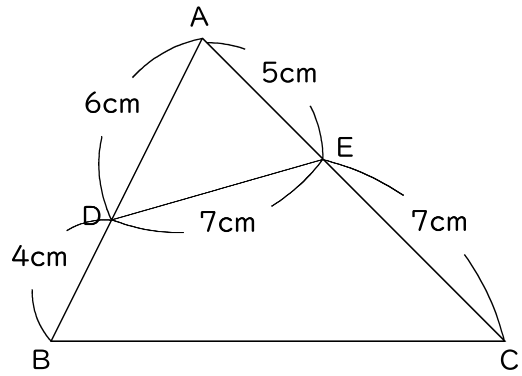
（　　　　　　　　　　　　　　　　　）等しいので、△ＡＢＤ ∽ △ＡＣＥ



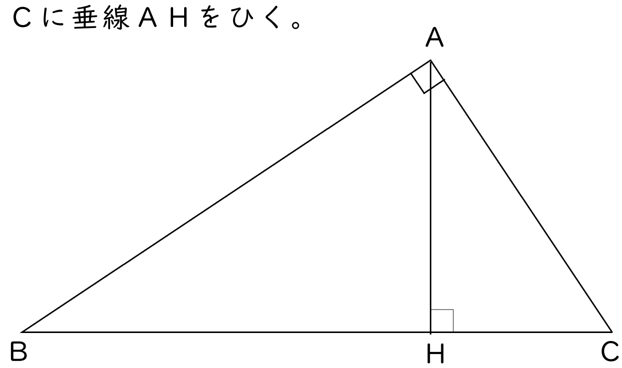
問２．問１でＢＤとＣＥとの交点をＦとした時、
　　　　　　　　　　　　△ＢＦＥ∽△ＢＡＤであることを証明しなさい。



問３．△ＡＥＤ∽△ＡＢＣであることを証明しなさい。また、ＢＣの長さを求めなさい。



問４．∠Ａ＝90°の△ＡＢＣで、Ａから斜辺ＢＣに垂線ＡＨをひく。
　　このとき、次のことを証明しなさい。



(ｱ) △ＨＢＡ∽△ＡＢＣ

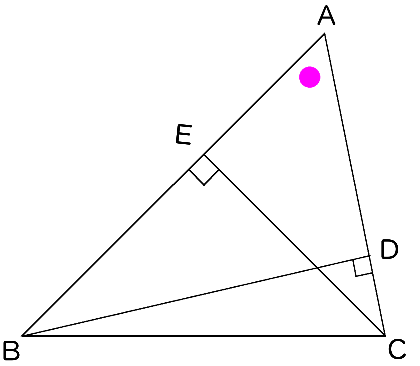
(ｲ) △ＨＢＡ∽△ＨＡＣ

図を書いて考えよう

(ｳ) ＡＨ＝6cm，ＢＨ＝9cmのとき，ＣＨの長さを求めなさい。

解答：問１～問４

問１．右の図の△ＡＢＣで、頂点Ｂ，Ｃから、それぞれ、ＡＣ，ＡＢに垂線ＢＤ，ＣＥをひく。
このとき、△ＡＢＤ∽△ＡＣＥであることを証明しなさい。



（　△ＡＢＤ　）と（　△ＡＣＥ　）において

ＢＤ⊥ＡＣ，ＣＥ⊥ＡＢだから、

∠（　ＡＤＢ　）＝９０°

∠（　ＡＥＣ　）＝９０°

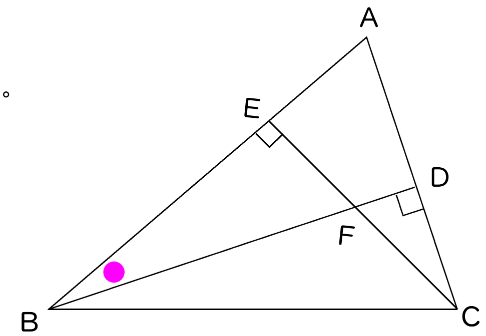
したがって　　∠ＡＤＢ＝∠（　ＡＥＣ　）　…　①

共通な角なので　∠ＢＡＤ＝∠（　ＣＡＥ　）　…　②

①②より、

（　2組の角がそれぞれ　）等しいので、△ＡＢＤ ∽ △ＡＣＥ

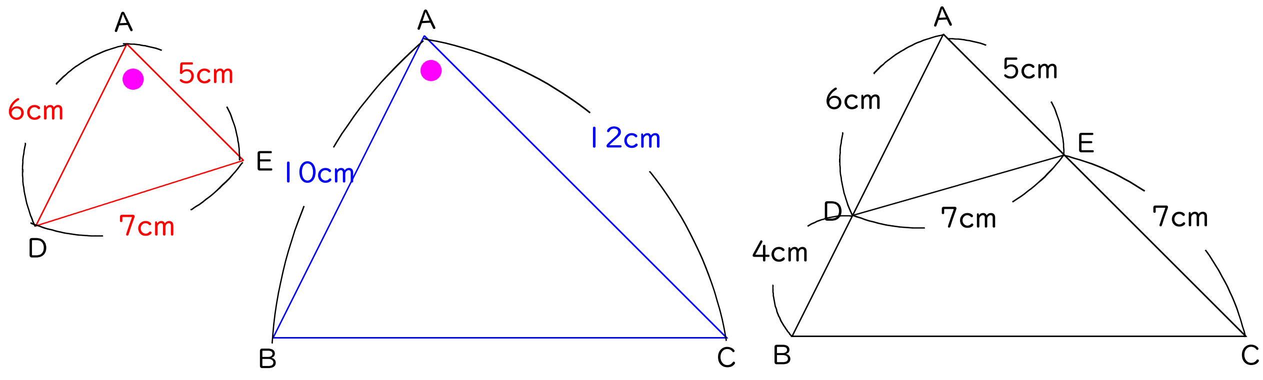
問２．問１でＢＤとＣＥとの交点をＦとした時、
△ＢＦＥ∽△ＢＡＤであることを証明しなさい。



△ＢＦＥと△ＢＡＤにおいて
ＢＤ⊥ＡＣ，ＣＥ⊥ＡＢだから、
∠ＢＥＦ＝90°，∠ＢＤＡ＝90°
したがって、　∠ＢＥＦ＝∠ＢＤＡ　…　①
共通な角なので、∠ＥＢＦ＝∠ＤＢＡ　…　②

①②より、2組の角がそれぞれ等しいので
△ＢＦＥ∽△ＢＡＤ

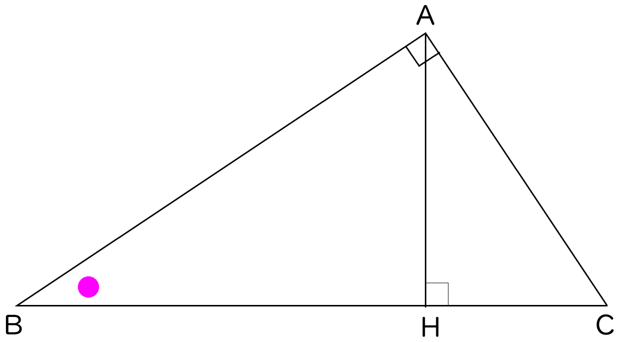
問３．△ＡＥＤ∽△ＡＢＣであることを証明しなさい。また、ＢＣの長さを求めなさい。



△AEDと△ABCにおいて　AE：AB＝5：10＝1：2
DA：CA＝6：12＝1：2
よって，　AE：AB＝DA：CA　…　①
共通な角なので、　∠EAD＝∠BAC　…　②
①，②より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので　△AED∽△ABC

ＢＣはＤＥと対応しているので、　ＢＣ：ＤＥ＝2：1より
ＢＣはＤＥの半分なので　ＢＣ＝3.5cm

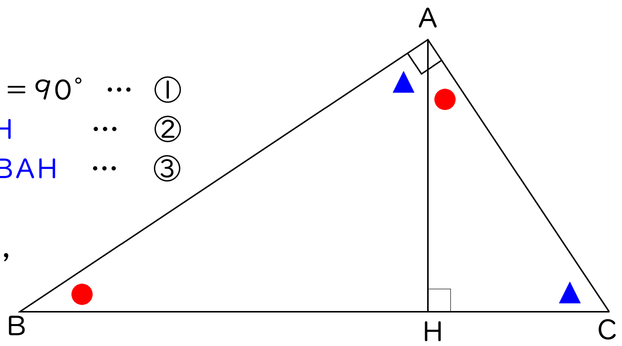
問４．∠Ａ＝90° の△ＡＢＣで、Ａから斜辺ＢＣに垂線ＡＨをひく。
　このとき、次のことを証明しなさい。



(ｱ) △ＨＢＡ∽△ＡＢＣ

△HBAと△ABCにおいて
∠AHB＝∠BAC＝90° … ①
共通な角なので　∠HBA＝∠ABC　…　②
①②より、
　2組の角がそれぞれ等しいので,
　　　　　　　　　　△HBA∽△ABC

(ｲ) △ＨＢＡ∽△ＨＡＣ



△HBAと△HACにおいて　∠AHB＝∠BAC＝90° … ①
△HBAの内角の和より　∠B＝90° −∠BAH　…　②
∠BAC＝90° より　∠CAH＝90° −∠BAH　…　③
②，③より　∠B＝∠CAH　…　④
①，④より　2組の角がそれぞれ等しいので,
　　　　　　△HBA∽HAC

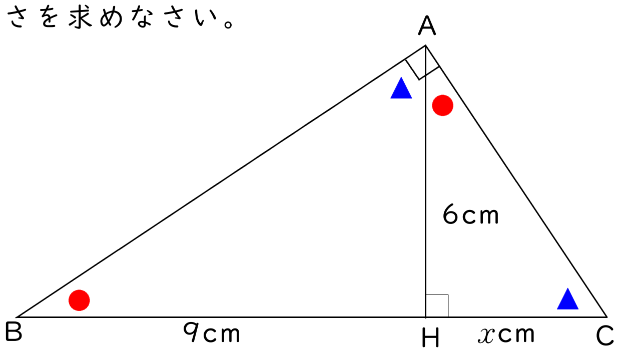
(別解)①まで同じで
△HBAの内角の和より　∠BAH＝90° −∠B　…　②
∠BAC＝90° より　∠HCA＝90° −∠B　…　③
②，③より　∠BAH＝∠HCA　…　④
①，④より　2組の角がそれぞれ等しいので，△HBA∽HAC

(ｳ) ＡＨ＝6cm，ＢＨ＝9cmのとき，ＣＨの長さを求めなさい。
(ｲ)の結果△ HBA ∽ HAC を使って

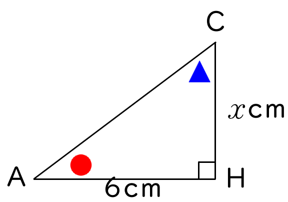
$9:6=6:x$

$9x=36$

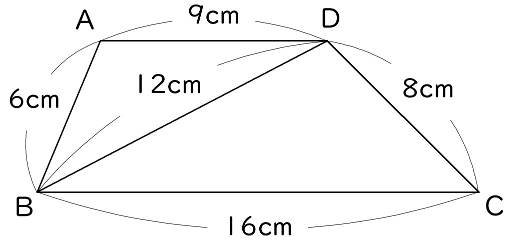
$x=4$



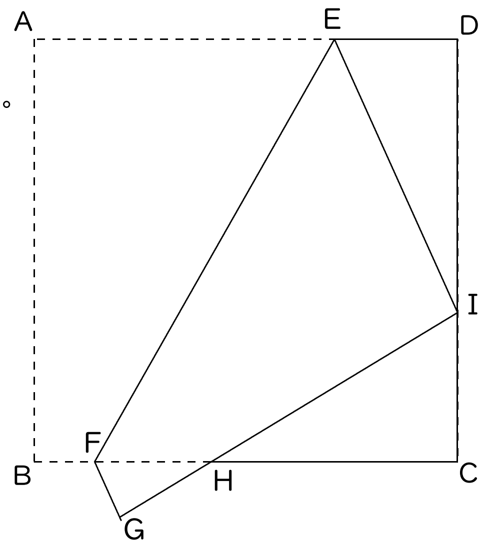
同じ向きに図を書いてみよう
角度のマークを合わせて書くこと
AHの長さを2度使うことになる



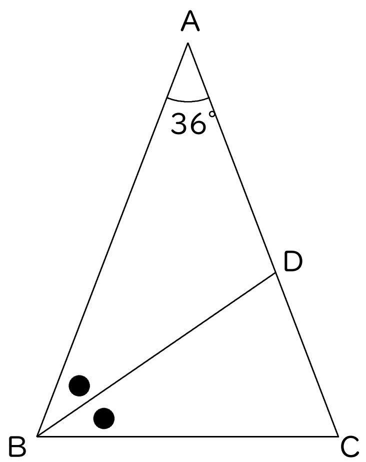
問５．右の図で，△ ABD ∽△ DCB であることを証明しなさい。
　　また，AD // BC であることを証明しなさい。



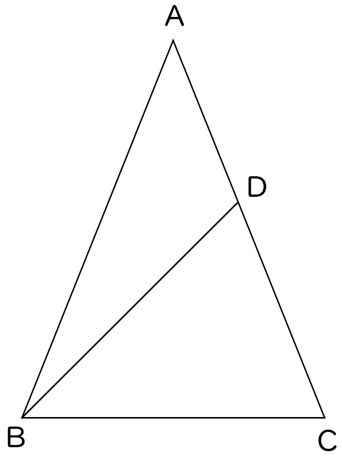
問６．図のように、正方形の紙を折り返します。
　　このとき、△FGHと相似な三角形を探して下さい。



問７．頂角が36°の二等辺三角形ABCの底角∠Bの二等分線と辺ACとの交点をDとします。
　　このとき、AB：BC＝BC：CDであることを証明しなさい。

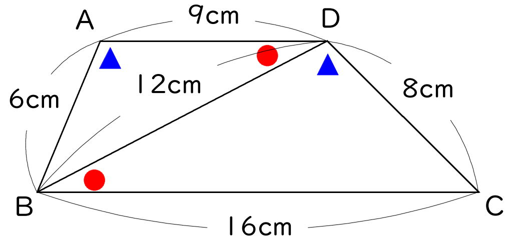


問８．次の図で，△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形です。辺AC上に，BD＝BCとなるように点Dをとるとき，△ABC∽△BDCであることを証明しなさい。
また，AB＝10cm，BC＝7cmのとき，CDの長さを求めなさい。



解答：問５～問８

問５．右の図で，△ ABD ∽△ DCB であることを証明しなさい。
。



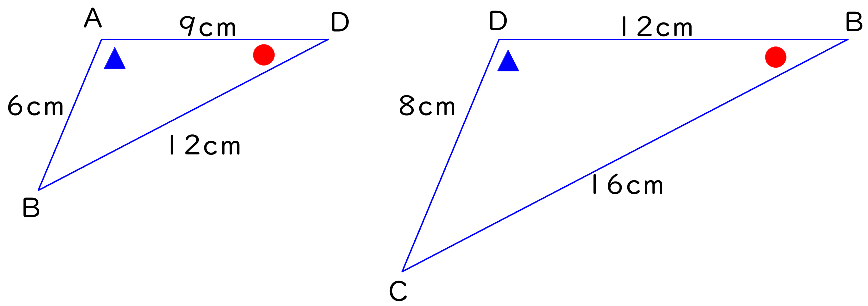
解き方の基本Ⅰ

同じ向きに２つの三角形を書いてから解く方法

(1)　同じ角度が同じ場所にくるように書く

平行線の錯角が等しいことが分かるので●

見た目で∠Aと∠CDBが等しいそう ▲



(2) 角のマークを見ながら、ABCDを書き込む

(3) ABCDを見ながら、長さを書き込む

(4) 比を使い、解く

解き方の基本Ⅱ

問題は必ず対応する点の順で書いてあることを利用して解く方法

(1)　△ABDと△DCBの書いてある順から、AとD，BとC，DとBが対応することが分かる

(2)　対応する順番を使って比で解く

解き方の基本Ⅰ，Ⅱ共通

AB：DC＝6：8＝3：4　　　①

BD：CB＝12：16　＝3：4　　②

DA：BD＝9：12＝3：4　　　③

①，②，③より　3組の辺の比がすべて等しいので相似となる

問５．AD//BCであることを証明しなさい

平行を証明する基本は、同位角か錯角が等しくなることをいえば良い

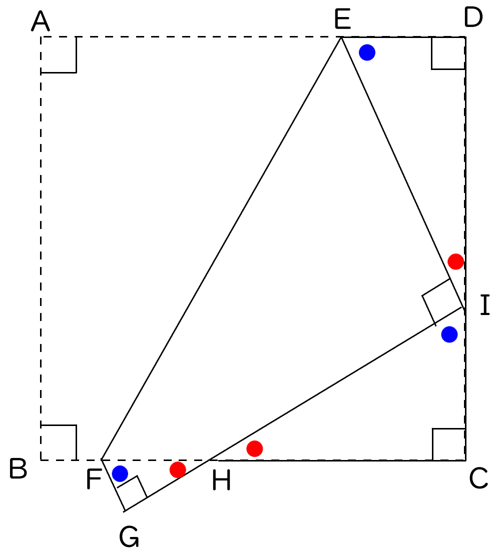
△ABD∽△DCBが証明できたので、対応する角は等しい

したがって、対応する角なので　∠ADB＝∠DBC

錯角が等しくなることがいえたので、AD//BC

問６．折り返した角度は等しいことに注目

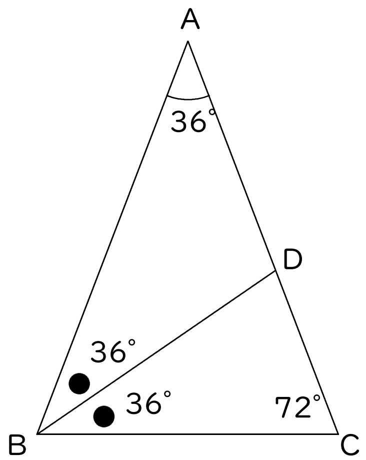
△FGHと相似な三角形を探すためのポイントは ● ＋● ＝90°



△ICHと△EDI

角の色を見て
対応する順に書きましょう

問７．頂角が36° の二等辺三角形ABCの底角∠Bの二等分線と辺ACとの交点をDとします。
このとき、AB：BC＝BC：CDであることを証明しなさい。



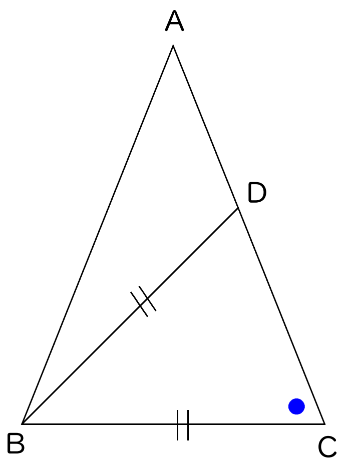
∠ABC＝∠ACB
＝(180－36)÷2
＝72

∠CBD＝72÷2＝36＝∠A

2組の角がそれぞれ等しいので，△ABC∽△BCD

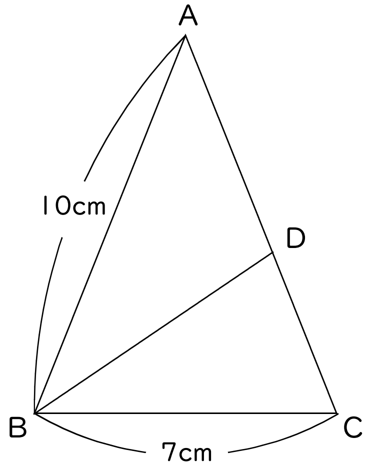
相似な三角形の対応する辺の比は等しいので
AB：BC＝BC：CDとなる

問８．次の図で，△ABCは，AB＝ACの二等辺三角形です。辺AC上に，BD＝BCとなるように
点Dをとるとき，△ABC∽△BDCであることを証明しなさい。



△ABCと△BCDにおいて
ともに二等辺三角形で、１つの底角が共通なので、
残りの2組の角がそれぞれ等しいことになる
したがって、△ABC∽△BCD

問８．AB＝１0cm，BC＝7cmのとき，CDの長さを求めなさい。



△ABC∽△BCDより

AB：BC＝BC：CD

$10:7=7:\mathrm{CD}$

$10\mathrm{CD}=49$

$\mathrm{CD}=\dfrac{49}{10}$