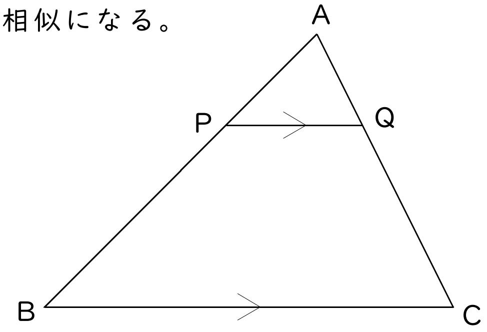
4　平行線と線分の比

◎　平行な直線がある２つの三角形の線分の比についてⅠ

△ＡＢＣでＰＱ∥ＢＣのとき、△ＡＰＱは△ＡＢＣと相似になる。



＜証明＞

△ＡＰＱと△ＡＢＣにおいて

ＰＱ∥ＢＣより、

平行線の（　同位角　）は等しいから

∠ＡＰＱ＝∠（　ＡＢＣ　）…　①

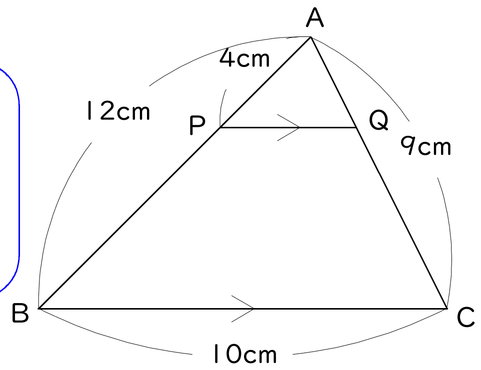
∠ＡＱＰ＝∠（　ＡＣＢ　）…　②

①，②より（　2組の角　）がそれぞれ等しいので　　△ＡＰＱ∽△ＡＢＣ

これからは、平行線のあるこの図を見たらすぐに相似な図形があると思えるようにしよう
さらに、相似な図形なので、相似比を使い対応する線分の長さも求めることができます

例１．AP＝4cm，AB＝12cm，BC＝10cm，AC＝9cmであるとき

(ｱ)　△ＡＰＱ：△ＡＢＣの相似比を求める



相似な図形は，対応する線分の比は等しいので
ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ＝ＰＱ：ＢＣ
対応する辺の長さが分かれば、それが相似比となる

ＡＰ：ＡＢ＝4cm：12cm＝1：3

(ｲ)　ＡＱ，ＰＱの長さを求める
(ｱ)で求めた相似比を使って求める

ＡＱと対応する辺は、ＡＣ（9cm）なので、ＡＱ：ＡＣ（9cm）＝1：3

1：3＝ＡＱ：9

3ＡＱ＝9
ＡＱ＝3

解き方の基本はナカナカ♪ソトソト♪でした
右辺と左辺が逆でも、前項と後項が逆でもＯＫ
1：3＝ＡＱ：9

赤数字が3倍と見て　AQ＝1×3＝3　でも勿論ＯＫ

ＰＱと対応する辺は、ＢＣ（10cm）なので、ＰＱ：ＢＣ（10cm）＝1：3

ＰＱ：10＝1：3

一番大切なことは、対応する線分が分かる事!!

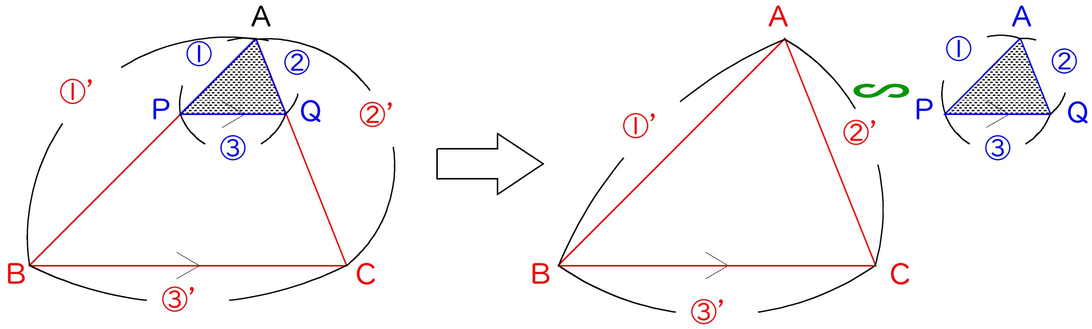
1：3＝ＰＱ：10

3ＰＱ＝10

$ＰＱ＝\dfrac{10}{3}$

$\dfrac{10}{3}$倍と見て　$PQ＝1\times\dfrac{10}{3}＝\dfrac{10}{3}$　でも勿論ＯＫ

◎ 平行線のある三角形の線分の比を，相似な図形の性質と関連づけて理解



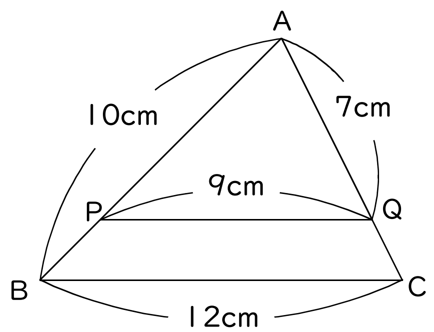
ＰＱ∥ＢＣならば
相似な図形より，対応する線分の比は等しいので
ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ＝ＰＱ：ＢＣ　が成り立つ
①：①'　＝　②：②'　＝　③：③'

◎ 三角形の線分の比の性質を用いて，相似な図形の線分の長さを求めるⅠ

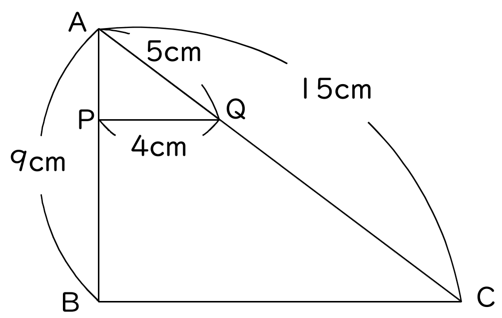
問１．△ＡＢＣでＰＱ∥ＢＣのとき、各問いに答えなさい。

手順
① 相似な図形を確認する
② 対応する２つの線分を探し、相似比を求める
③ ②の相似比を利用して、線分の長さを求める

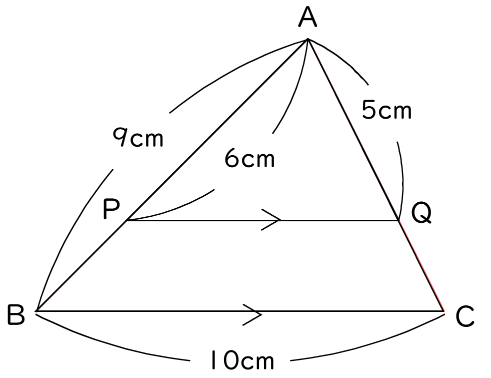
(ｱ)ＡＰ，ＡＣの長さ



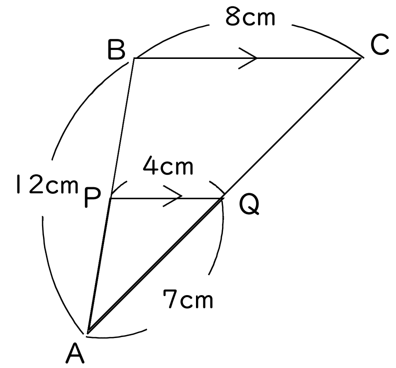
(ｲ)ＡＰ，ＢＣの長さ



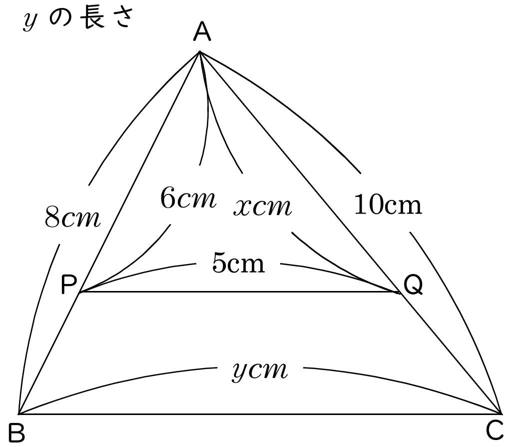
(ｳ) PQ，ACの長さ



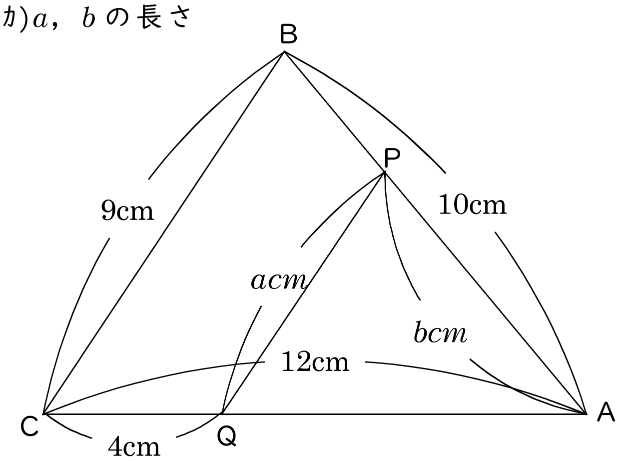
(ｴ) AP，ACの長さ



(ｵ)x，y の長さ

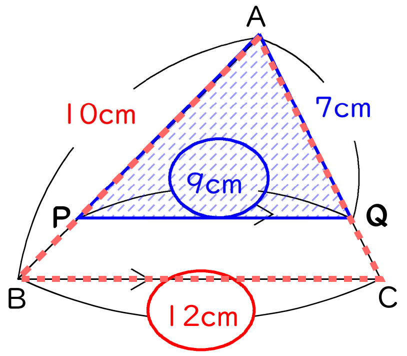


(ｶ)a，b の長さ



解答：問１　相似比が分かる線分に○印が付いています

(ア) AP，ACの長さ

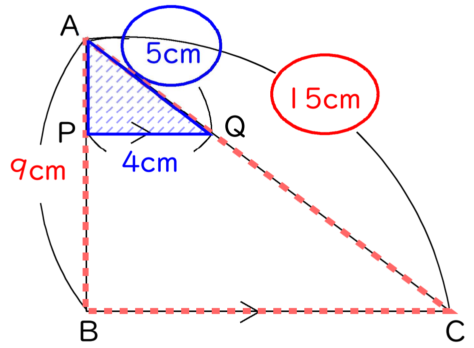


$\boxed{\text{相似比は}\quad 9：12＝3：4}$

3：4 ＝AP：10
4AP＝30
$\mathrm{AP}=\dfrac{15}{2}$

3：4 ＝7：AC
3AC＝28
$\mathrm{AC}=\dfrac{28}{3}$

(イ) AP，BCの長さ



$\boxed{\text{相似比は}\quad 5：15＝1：3}$

1：3＝AP：9
3AP＝9
AP＝3

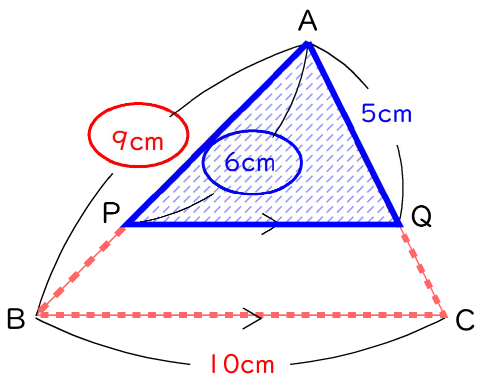
1：3＝4：BC
BC ＝12

＜青数字が４倍でも＞

＜赤数字が３倍でも＞

ナカナカ♪ソトソト♪は、どちらを左辺に書いてもOKですが、
求める文字を含んだ項を左辺に書く方が便利です

(ウ) PQ，ACの長さ

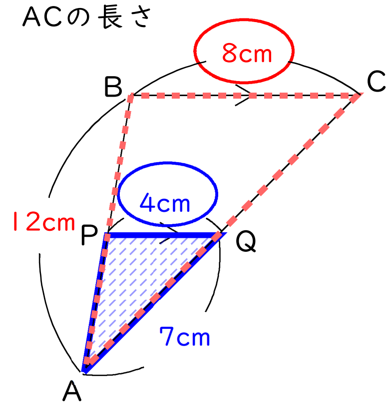


$\boxed{\text{相似比は}\quad 6：9＝2：3}$

2：3＝PQ：10
3PQ＝20
$\mathrm{PQ}=\dfrac{20}{3}$

2：3＝5：AC
2AC＝15
$\mathrm{AC}=\dfrac{15}{2}$

(エ) AP，ACの長さ



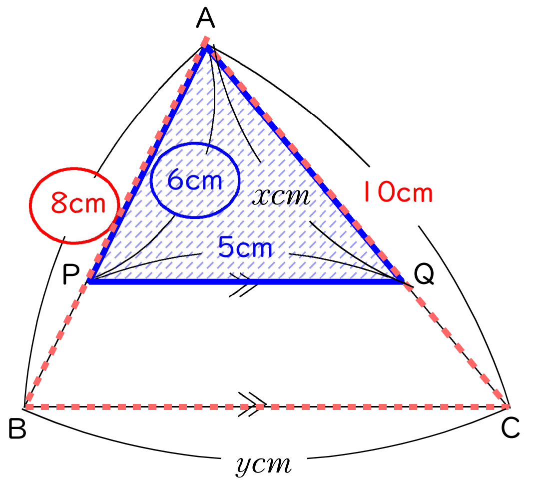
$\boxed{\text{相似比は}\quad 4：8＝1：2}$

1：2＝AP：12
2AP＝12
AP＝6

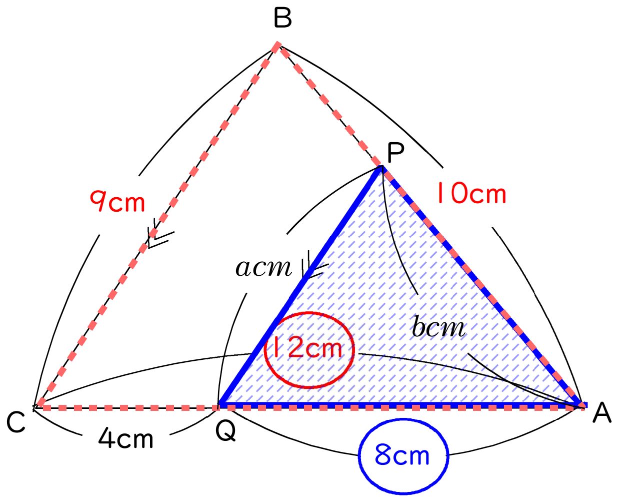
1：2＝7：AC
AC＝14

相似比が１：２なので、単純に
1：2＝AP：12　　1：2＝7：AC
AP＝12÷2　　AC＝7×2
とできると素晴らしい

(オ) x，y の長さ



(カ) a，b の長さ



AQの長さを12－4＝8と自分で求めます

相似比は　6：8＝3：4

$3:4 = x:10$

$4x = 30$

$x = \dfrac{15}{2}$

$3:4 = 5:y$

$3y = 20$

$y = \dfrac{20}{3}$

相似比は　8：12＝2：3

$2:3 = b:10$

$3b = 20$

$\mathrm{A}b = \dfrac{20}{3}$

$2:3 = a:9$

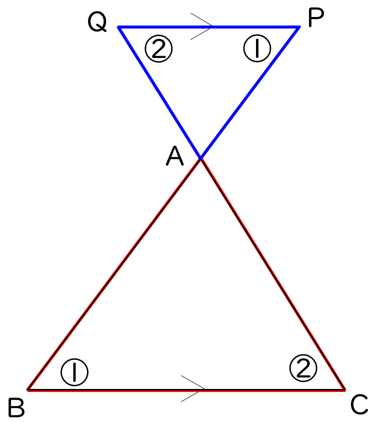
$3a = 18$

$\mathrm{P}a = 6$

比例式を解くのに、ナカナカソトソトを使っています

◎　平行な直線がある２つの三角形の線分の比についてⅡ

次の図のように、ＰＱ∥ＢＣのとき、△ＡＰＱは△ＡＢＣと相似になる。



＜証明＞

△ＡＰＱと△ＡＢＣにおいて

ＰＱ∥ＢＣより、

ＰＱ∥ＢＣから、平行線の（　錯角　）は等しいので

∠ＡＰＱ＝∠（ ＡＢＣ ）…　①

∠ＡＱＰ＝∠（ ＡＣＢ ）…　②

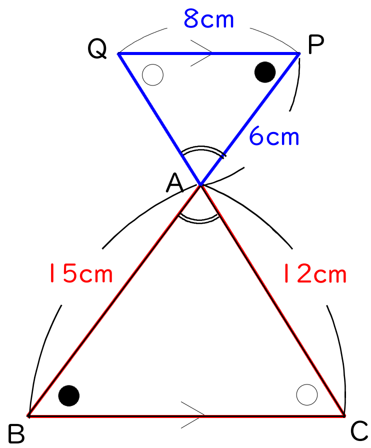
(対頂角ＡでもOKです)

①，②より（　2組の角　）がそれぞれ等しいから

△ＡＰＱ∽△ＡＢＣ

すぐに相似な図形があると気がつかなければならない２つ目の例です
同じく、相似比が分かれば、対応する線分の長さも求めることができます

例２．AP＝6cm，AB＝15cm，PQ＝8cm，AC＝12cm



(ｱ) △ＡＰＱ：△ＡＢＣの相似比を求める

相似な図形は，対応する線分の比は等しいので
ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ＝ＰＱ：ＢＣ
対応する辺の長さが、分かればそれが相似比となる

ＡＰ：ＡＢ＝6cm：15cm＝2：5

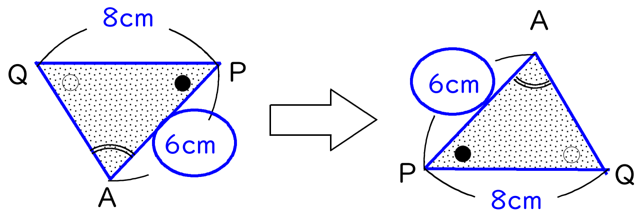
(ｲ) AQ，BCの長さを求めなさい。
(ｱ)で求めた相似比を使って求める

ＡＱと対応する辺は、ＡＣ（12cm）なので、ＡＱ：ＡＣ（12cm）＝2：5

2：5＝ＡＱ：12

5ＡＱ＝24

$$ＡＱ＝\frac{24}{5}$$



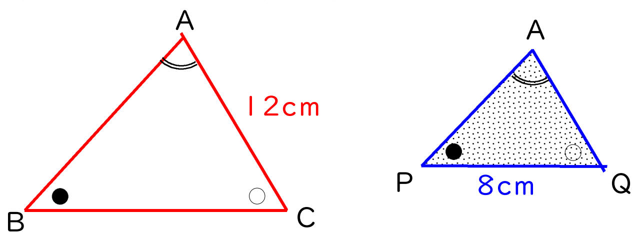
同じ向きにするために回転させています

ＢＣと対応する辺は、ＰＱ（8cm）なので、ＰＱ（8cm）：ＢＣ＝2：5

2：5＝8：ＢＣ

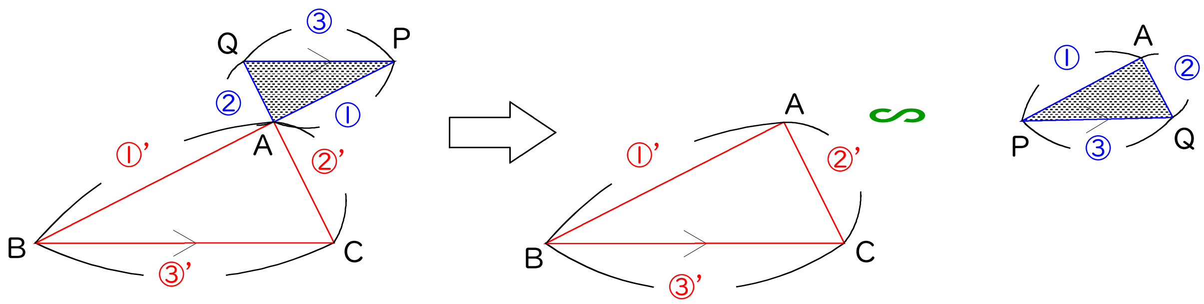
2ＢＣ＝40

ＢＣ＝20



対応する線分は、角度のマークを見ると分かりやすい

◎ 三角形の線分の比の性質を用いて，相似な図形の線分の長さを求めるⅡ

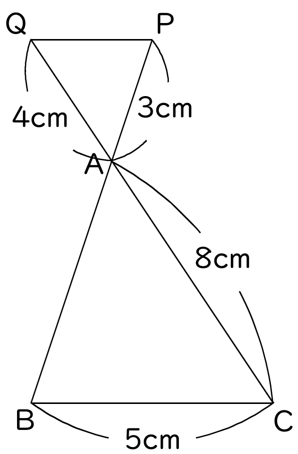


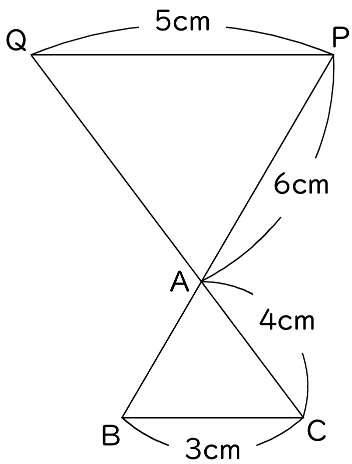
ＰＱ//ＢＣならば
相似な図形より，対応する線分の比は等しいので
ＡＰ：ＡＢ＝ＡＱ：ＡＣ＝ＰＱ：ＢＣ　　が成り立つ
①：①'　＝　②：②'　＝　③：③'

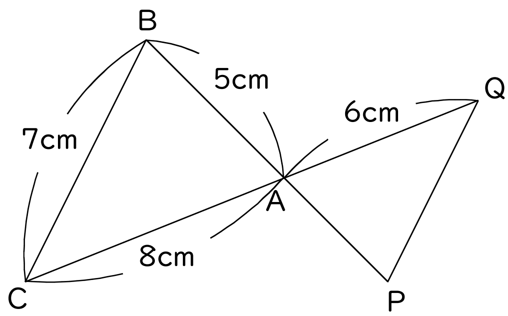
問２．△ＡＢＣでＰＱ//ＢＣのとき、各問いに答えなさい。

手順
① 相似な図形を確認する
② 対応する２つの線分を探し、相似比を求める
③ ②の相似比を利用して、線分の長さを求める

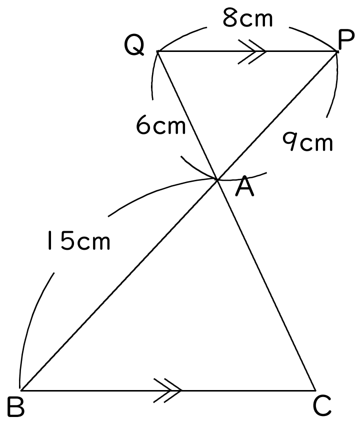
(ｱ) ＡＢ，ＰＱの長さ　(ｲ) ＡＢ，ＱＡの長さ　(ｳ) ＡＰ，ＰＱの長さ

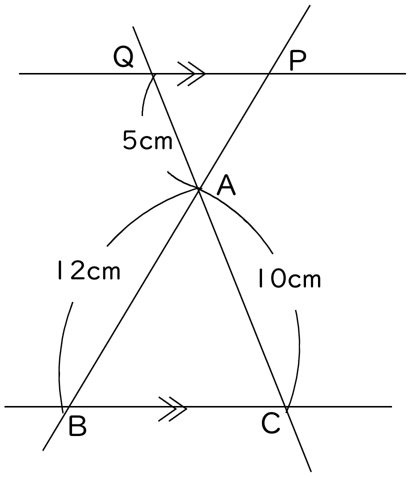


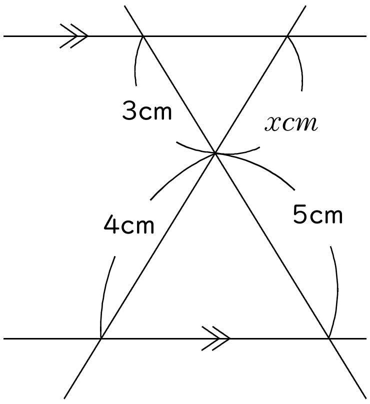




(ｴ) AC，BC の長さ　　(ｵ) APの長さ　　(ｶ) x の長さ

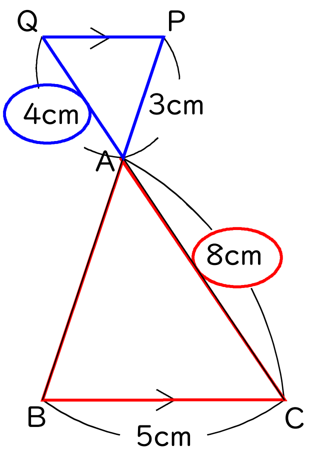


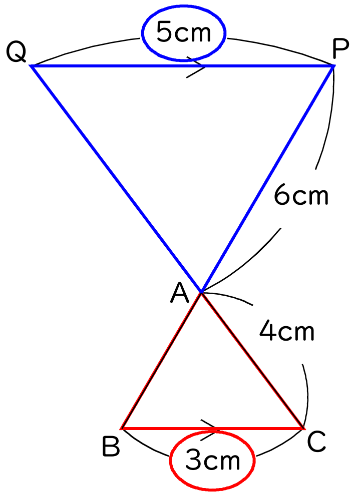


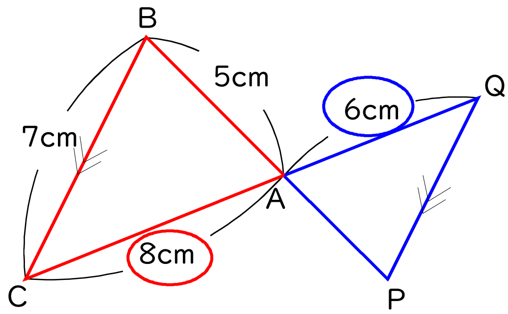


解答：問２　相似比が分かる線分に○印が付いています

(ｱ) ＡＢ，ＰＱの長さ　(ｲ) ＡＢ，ＱＡの長さ　(ｳ) ＡＰ，ＰＱの長さ







相似比は４：８＝１：２

赤い△は青い△の２倍

AB＝３×２＝６

$PQ = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

相似比は３：５

３：５＝AB：６

5AB＝18

$AB = \frac{18}{5}$

３：５＝４：AQ

3AQ＝20

$AQ = \frac{20}{3}$

相似比は６：８＝３：４

３：４＝AP：５

4AP＝15

$AP = \frac{15}{4}$

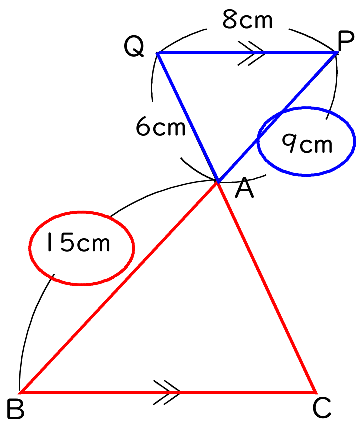
３：４＝PQ:７

4PQ=21

$PQ = \frac{21}{4}$

対応する線分同士で長さが分かっている辺を見つければ、相似比が求められます。
また比例式の解き方は，色々ありますので、問題によって解き方を変えられるとGOOD。

(エ) AC，BC の長さ



相似比 9：15＝3：5

3：5＝6：AC

ナカナカソトソトではなく

AC＝5×2＝10

3：5＝8：BC

$$BC = 5 \times \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$$

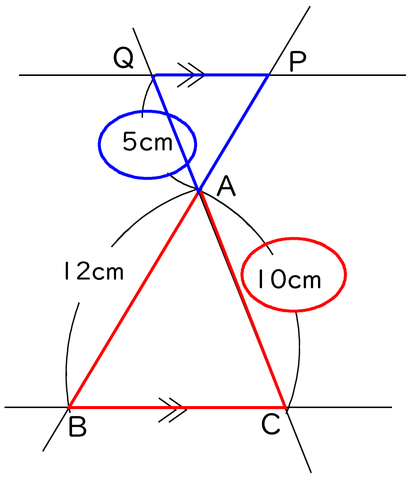
ナカナカソトソトで解くと

3：5＝8：BC

3BC＝40

$$BC = \frac{40}{3}$$

(オ) APの長さ

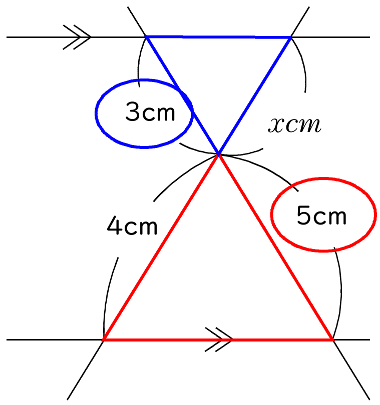


相似比 5：10＝1：2

APはABの半分なので

AP ＝12÷2＝6

(カ) x の長さ



相似比 3：5

$3 : 5 = x : 4$

$5x = 12$

$$x = \frac{12}{5}$$