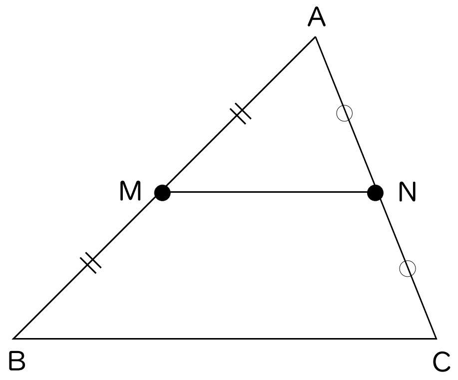
7　中点連結定理

◎　中点連結定理の理解



△ＡＢＣで、２辺ＡＢ，ＡＣの中点を，
それぞれ，Ｍ，Ｎとする

中点Ｍ，Ｎを結ぶと，
ＡＭ：ＡＢ＝ＡＮ：ＡＣ＝１：２　…　①
∠ＭＡＮ＝∠ＢＡＣ　…　②
①，②より
２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので
△（ ＡＭＮ ）∽ △（ ＡＢＣ ）

相似な図形では対応する角が等しいので
∠（ ＡＭＮ ）＝∠（ ＡＢＣ ）
同位角が等しいことがいえたので　→　MN // BC

相似比は（ １ ）：（ ２ ）　→　$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$

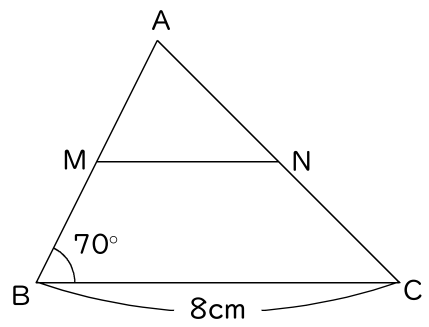
中点連結定理
MN // BC
$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$

中点連結定理を式ではなく、簡単な言葉で説明すると
中点と中点を結ぶと、平行になり、長さが半分になるということ

これは，特に新しい内容ではありません。「５　線分の比と平行線」で比が等しいと平行になることと，その証明の途中で三角形が相似になり，対応する辺の比は相似比に等しくなることを学習しました。
今回，**中点を結び，相似比が１：２となる場合は，平行で長さが半分になること**を，特に取り上げた定理です。使う頻度がとても多いので必ず身につけましょう。

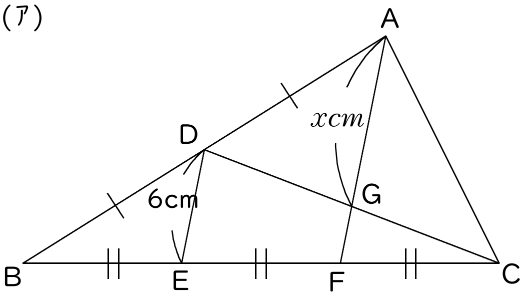
◎　中点連結定理を使い、辺の長さなどを求める

問１．次の図の△ABCで，点Ｍ，Ｎは，それぞれ，辺AB，ACの中点です。
このとき，MNの長さと∠AMNの大きさをそれぞれ求めなさい。

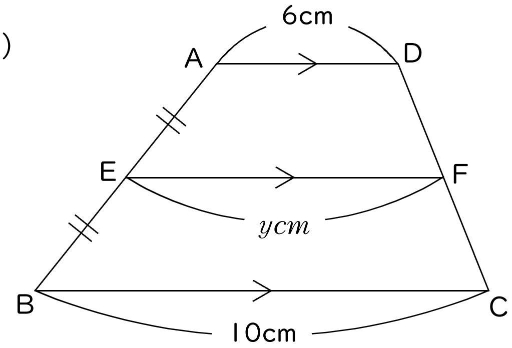


問２．次の図の x，y の値を求めなさい。

(ｱ)



(ｲ)

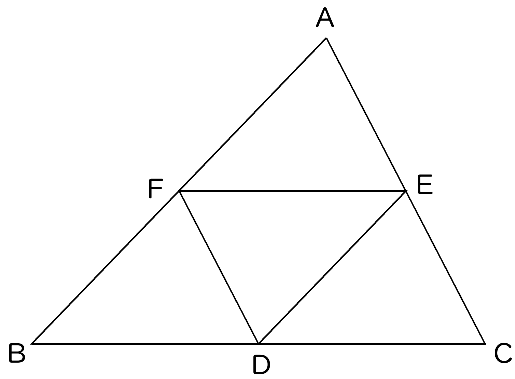


◎　中点連結定理を使い、図形の性質の証明をする

問３．△ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点を、それぞれ，Ｄ，Ｅ，Ｆとする。

(ｱ)△ＤＥＦと△ＡＢＣと相似であることを証明しなさい。

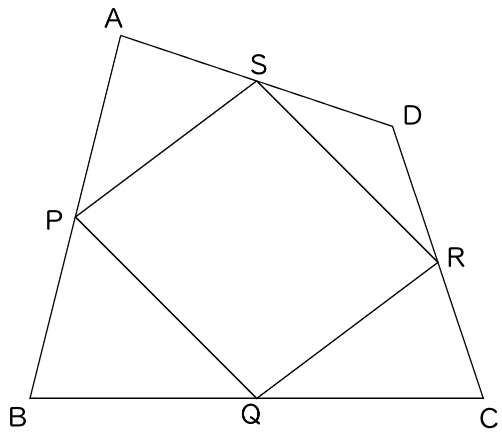
＜BC，CA，ABに対応するD，E，Fは同じ順番で書いてあります＞



(ｲ)ＡＢ＝7cm，ＢＣ＝8cm，ＣＡ＝9cmのとき，△ＤＥＦの周の長さを求めなさい。

(ｳ)図の中には，小さな三角形が４つあります。どんな関係になっていますか。

問４．四角形ＡＢＣＤの４辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの中点を、それぞれ、
　　Ｐ，Ｑ，Ｒ，Ｓとすると、四角形ＰＱＲＳは、どんな四角形になるか。



対角線ＡＣをひく
△ＡＢＣでＰ，ＱはＡＢ，ＢＣの中点なので
中点連結定理より
（　　　　）//（　　　　）…　①
　　　　ＰＱ＝（　　　　）…　②
△ＡＤＣでＲ，ＳはＣＤ，ＤＡの中点なので
中点連結定理より
（　　　　）//（　　　　）…　③
　　　　ＳＲ＝（　　　　）…　④

①，③より　ＰＱ//（　　　　）…　⑤
②，④より　ＰＱ＝（　　　　）…　⑥
⑤，⑥より　（　　　　　　　　　　　　　　）なので
　　　四角形ＰＱＲＳは（　　　　　　）である。

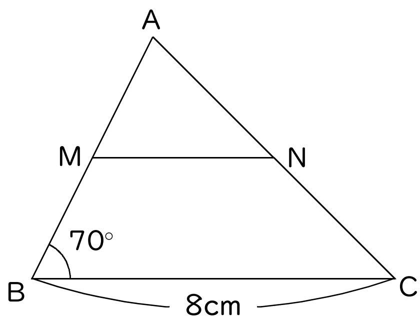
問５.問４において、四角形ＡＢＣＤの対角線の長さが等しいとき、
　　　　　　　　四角形ＰＱＲＳはどんな四角形になりますか。

解答：問１～問５

問１.

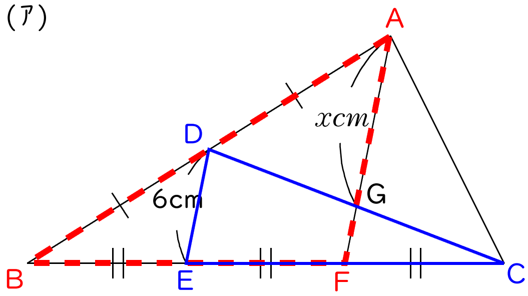
MNの長さは8cmの半分なので4cm

∠AMNの大きさは，
同位角の∠ABCと同じなので70°



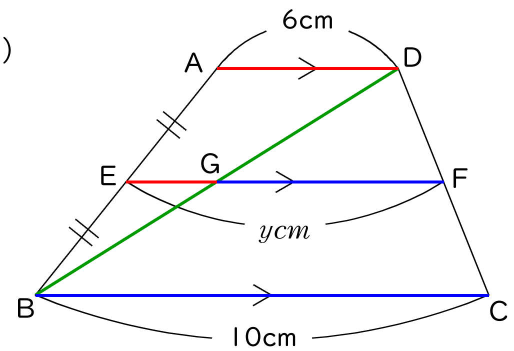
問２.

(ア)



△ABFでAF＝８×２＝１６
△CDEでFG＝８÷２＝４
AG＝１６－４＝１２

(イ)



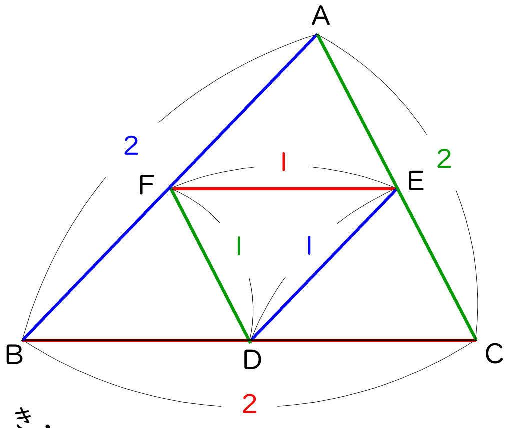
△ABDでEG＝６÷２＝３
△DBCでGF＝１０÷２＝５
EF＝３＋５＝８
※ACを結んでも構わない

問３．

(ｱ)　△DEFと△ABCにおいて
中点連結定理より

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=\frac{1}{2}$$

3組の辺の比がすべて等しいので，
△DEF∽△ABC



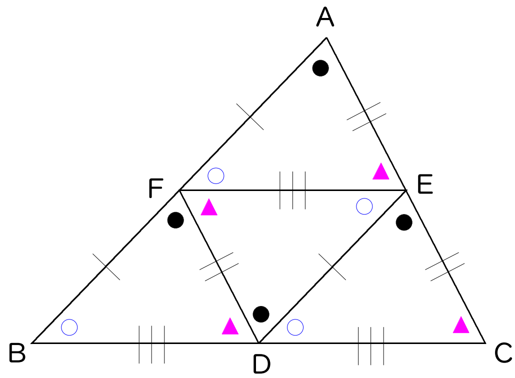
(ｲ)　AB＝5cm，BC＝6cm，CA＝7cmのとき，
△DEFの周の長さの求め方

① 1辺ずつ求める方法　　$DE=\frac{5}{2}$，EF＝3cm，$FD=\frac{7}{2}$　　合計して9cm

② 3辺の長さを全部足してから半分にする　　(5＋6＋7)÷2＝9　　9cm

(ｳ)　小さい三角形４つは，
すべて合同の関係が成り立ちます。

△ABCも含めて５つにした場合は，
すべて相似の関係が成り立ちます。



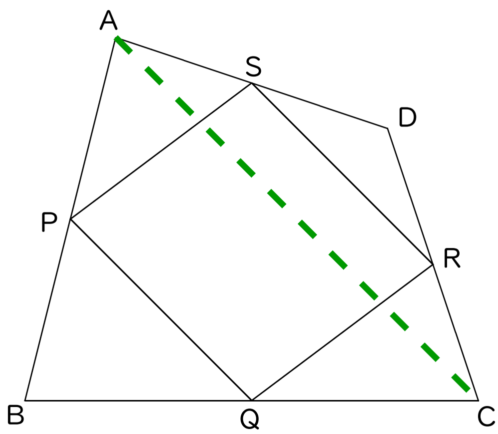
問４．

対角線ＡＣをひく
△ＡＢＣでＰ，ＱはＡＢ，ＢＣの中点なので
中点連結定理より
（　ＰＱ　）//（　ＡＣ　）　　…　①

ＰＱ＝（　$\frac{1}{2}$ＡＣ　）…　②

△ＡＤＣでＲ，ＳはＣＤ，ＤＡの中点なので
中点連結定理より
（　ＳＲ　）//（　ＡＣ　）　　…　③

ＳＲ＝（　$\frac{1}{2}$ＡＣ　）…　④



①，③より　ＰＱ//（　ＳＲ　）　…　⑤

②，④より　ＰＱ＝（　$\frac{1}{2}$ＳＲ　）…　⑥

⑤，⑥より　（　１組の向かい合う辺が等しくて平行　）なので
四角形ＰＱＲＳは（　平行四辺形　）である。

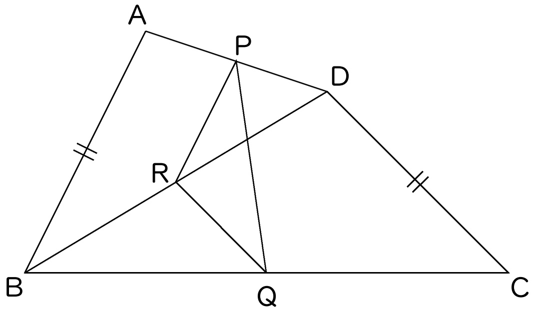
問５．

AC＝BD，PQ＝SR＝$\frac{1}{2}$AC，SP＝RQ＝$\frac{1}{2}$BDより，

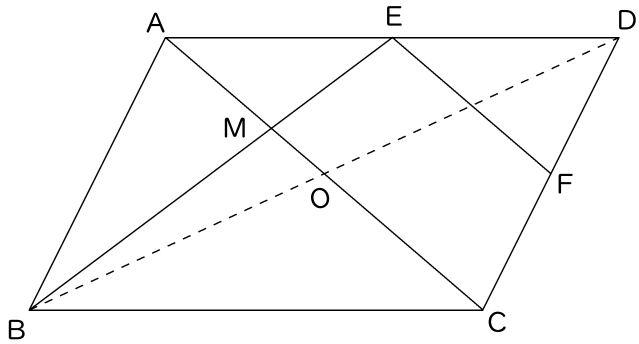
４つの辺が等しくなるのでひし形になる。

練習問題

問１．AB＝CDである四角形ABCDの辺AD，BC，対角線BDの中点を，
それぞれP，Q，Rとするとき，△PQRはどんな三角形になりますか。



問２．点Ｅ，Ｆは▱ＡＢＣＤの辺ＡＤ，ＣＤのそれぞれの中点であるとき、
次の問いに答えなさい。



(ｱ)　ＥＦ∥（　　　　　）
　　ＥＦ＝（　　　　　）

(ｲ)　ＢＭ：ＭＥを求めなさい。

(ｳ)　ＡＭ：ＭＣを求めなさい。

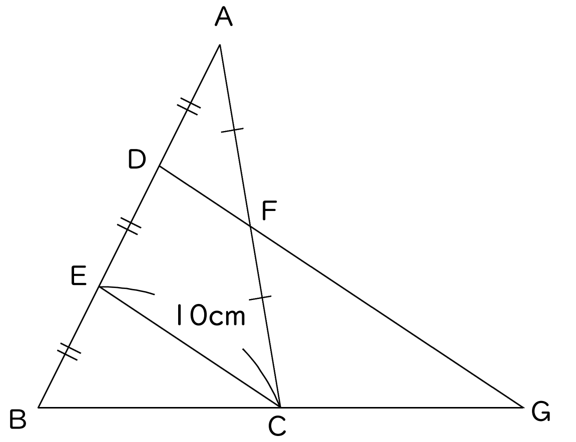
(ｴ)　△ＡＭＥの面積は、△ＡＢＭの面積の何倍ですか。

(ｵ)　△ＡＭＥの面積は、△ＡＢＤの面積の何倍ですか。

(ｶ)　△ＡＭＥの面積は、｀ＡＢＣＤの面積の何倍ですか。

問３．図の△ABCで，点D，Eは辺ABを３等分する点で，点Fは辺ACの中点です。
点Gは辺DFを延長した直線とBCを延長した直線の交点です。EC＝10cmのとき，次の各問いに答えなさい。

(ｱ) DFの長さを求めなさい。



(ｲ) BC＝CGであることを証明しなさい。

△AECにおいて
D，Fは中点なので，中点連結定理より
（　　　）∥（　　　）

その平行線を△BGDにおいて見ると
DG ∥ EC となるので
BE：ED＝（　　　）：（　　　）＝1：1
したがって　BC＝CG

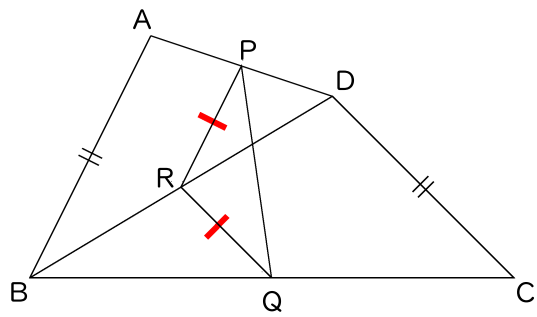
(ｳ) DGの長さを求めなさい。

(ｴ) FGの長さを求めなさい。

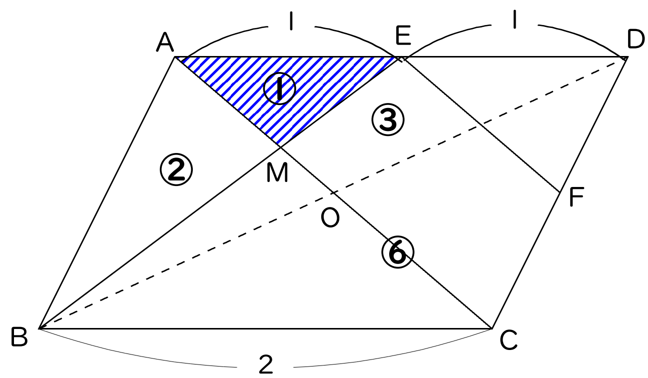
解答：練習問題

問１．AB＝CD，PR＝$\frac{1}{2}$AB，QR＝$\frac{1}{2}$CDより　PR＝QR

したがって、△PQRは，二等辺三角形になる。



問２．点Ｅ，Ｆは▱ＡＢＣＤの辺ＡＤ，ＣＤのそれぞれの中点である



(ｱ)　ＥＦ//（ＡＣ）

ＥＦ＝（$\frac{1}{2}$ＡＣ）

(ｲ)　△AME∽△CMBより

ＢＭ：ＭＥ＝2：1

(ｳ)　ＡＭ：ＭＣ＝1：2

(ｴ)　△ＡＭＥの面積は、△ＡＢＭの面積の$\frac{1}{2}$倍

底辺の比はＭＥ：ＢＭ＝1：2＝△ＡＭＥの面積：△ＡＢＭの面積

(ｵ)　△ＡＭＥの面積は、△ＡＢＤの面積の$\frac{1}{6}$倍

△ＡＭＥの面積＝①とすると　　△ＡＢＭの面積＝②

△ＡＢＥの面積＝①＋②＝③　　△ＡＢＤの面積＝③×２＝⑥

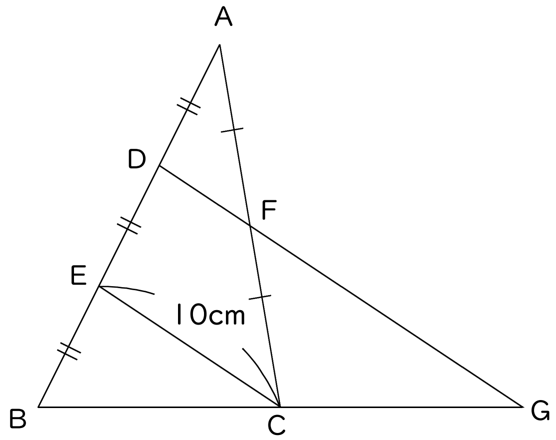
(ｶ)　△ＡＭＥの面積は、▱ＡＢＣＤの面積の$\frac{1}{12}$倍

△ＡＢＤの面積＝⑥　　▱ＡＢＣＤの面積＝⑥×２＝⑫

高さの等しい三角形の面積は，底辺の比＝面積比となります

問３．図の△ABCで，点D，Eは辺ABを３等分する点で，点Fは辺ACの中点です。
点Gは辺DFを延長した直線とBCを延長した直線の交点です。EC＝10cmのとき，
次の各問いに答えなさい。

(ｱ) DFの長さを求めなさい。



DF＝10÷２＝５

(ｲ) BC＝CGであることを証明しなさい。

△AECにおいて
D，Fは中点なので，中点連結定理より
（ DF ）∥（ EC ）

その平行線を△BGDにおいて見ると
DG ∥ EC となるので
BE：ED＝（ BC ）：（ CG ）＝1：1
したがって BC＝CG

(ｳ) DGの長さを求めなさい。

DG＝10×２＝20

(ｴ) FGの長さを求めなさい。

FG＝DG－DF＝20－５＝15

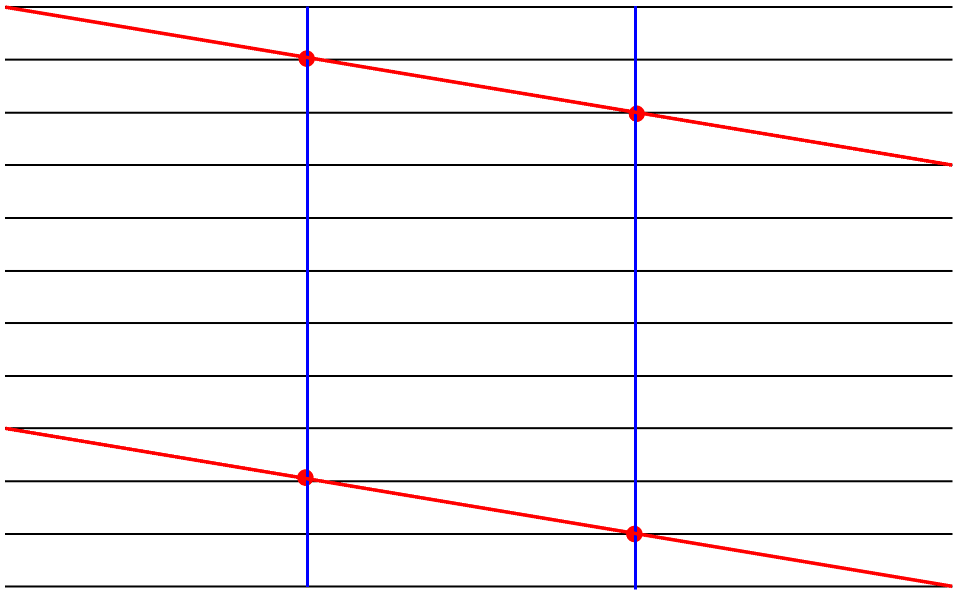
◎ ノートの罫線を利用し，ノートの横幅を等分してみよう

ノートの罫線を３等分する方法

ノートの罫線を４等分する方法

解答　ノートの罫線を利用し，ノートの横幅を等分する手順

ノートの罫線を３等分する方法

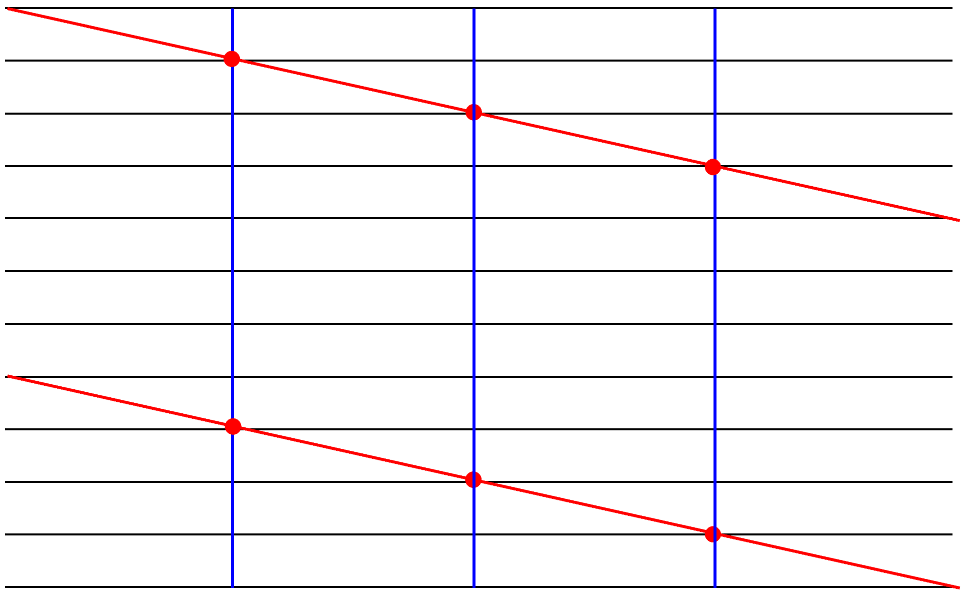


①３段分に
かかる
斜線を引く

②斜線と罫線
の交点に
印をつける

③交点を
結ぶと
３等分になる

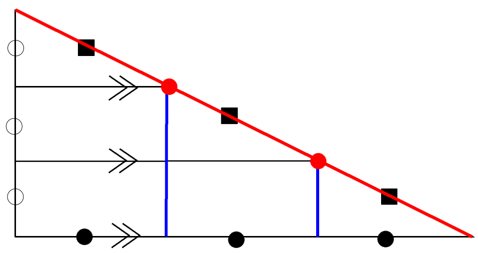
ノートの罫線を４等分する方法



①４段分に
かかる
斜線を引く

②斜線と罫線
の交点に
印をつける

③交点を
結ぶと
４等分になる



○が等しいので
■が等しくなる
すると●も等しくなり
３等分できる

８　重心

◎　中線の言葉の意味
◎　中点連結定理を使った、図形の性質の証明

三角形の頂点と，その対辺の中点を結ぶ線分を，この三角形の**中線**といいます。
ある三角形で，３本の中線を書くと，３本の中線は，どうなると思いますか？

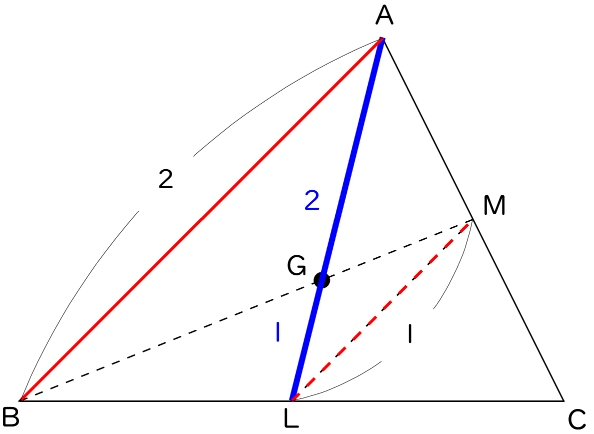
△ＡＢＣの２つの中線ＡＬ，ＢＭの交点をＧとする。
Ｌ，ＭはＢＣ，ＡＣの中点だから

中点連結定理より

（　　　　　）//　（　　　　　）

（　　　　　）＝（　　　　　）

△ABG∽△LMG，相似比２：１より
ＡＧ：ＧＬ＝（　　）：（　　）①



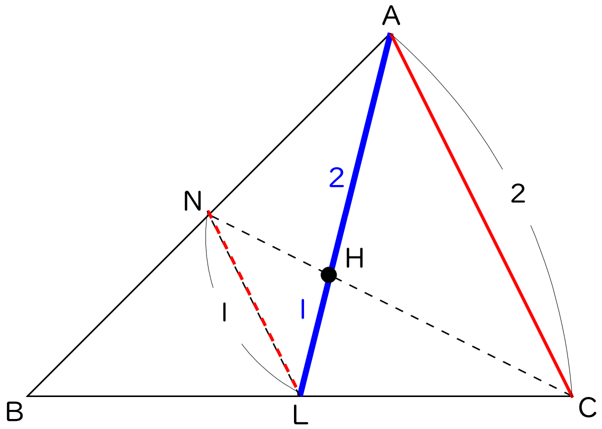
△ＡＢＣの２つの中線ＡＬ，ＣＮの交点をＨとする。
Ｌ，ＮはＢＣ，ＡＢの中点だから

中点連結定理より

（　　　　　）//　（　　　　　）

（　　　　　）＝（　　　　　）

△AHC∽△LHN，相似比２：１より
ＡＨ：ＨＬ＝（　　）：（　　）②



①，②から、ＧもＨもＡＬを２：１の分ける点なので、ＧとＨは一致する。
したがって、３つの中線は、同じ点で交わる。

解答

L，MはBC，ACの中点だから，（ LM ）//（ AB ）（ LM ）＝（ $\frac{1}{2}$ AB ）

△ABG∽△LMG，相似比２：１より　**AG：GL＝（ 2 ）：（ 1 ）… ①**

L，NはBC，ABの中点だから，（ LN ）//（ AC ）（ LN ）＝（ $\frac{1}{2}$ AC ）

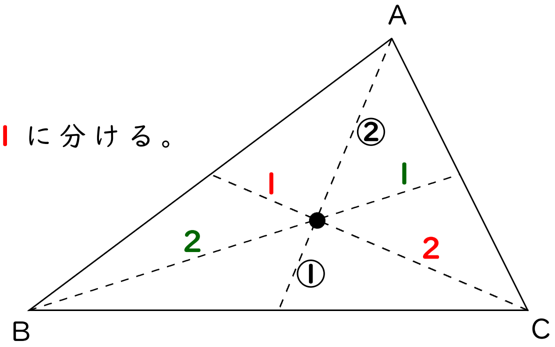
△AHC∽△LHN，相似比２：１より　**AH：HL＝（ 2 ）：（ 1 ）… ②**

◎ 三角形の重心

三角形の３つの中線は、同じ点で交わる。

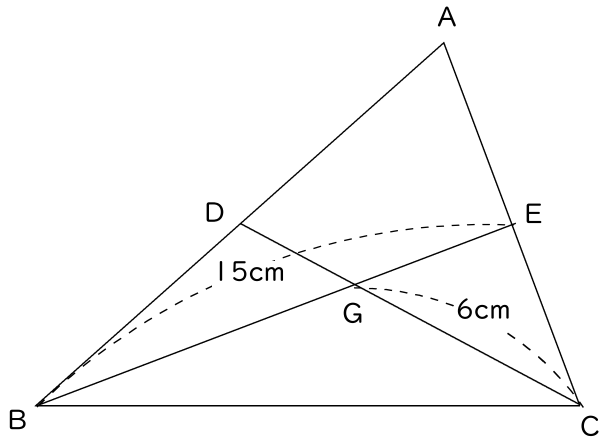
この点は、３つの中線を、それぞれ**２：１**に分ける。

三角形の３つの中線の交点を、
この三角形の**重心**という。



問１．△ＡＢＣにおいて，点Ｄ，Ｅは辺ＡＢ，ＡＣのそれぞれ中点であるとき，次の各問いに答えなさい。

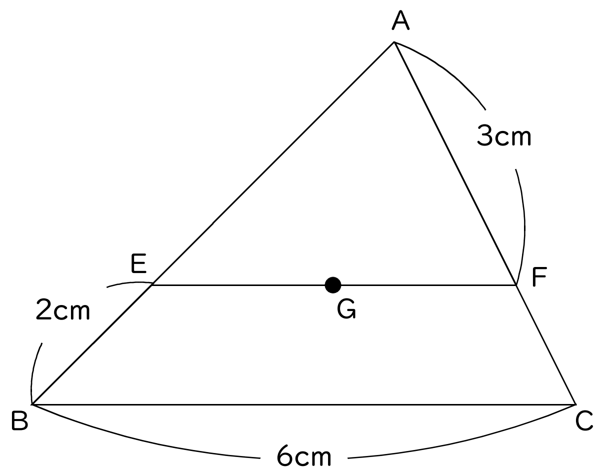
(ｱ) 線分ＧＥの長さを求めなさい。



(ｲ) 線分ＣＤの長さを求めなさい。

(ｳ) △ＡＢＣの面積が42㎝^{2}のとき、△ＢＣＤの面積と△ＢＧＤの面積を求めなさい。

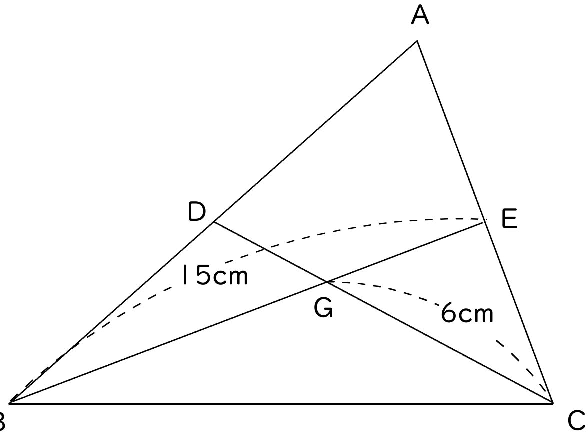
問２.次の図で、線分ＥＦは辺ＢＣに平行で、△ＡＢＣの重心Ｇを通ります。このとき、線分ＡＥ，ＦＣ，ＥＦの長さを、それぞれ求めなさい。



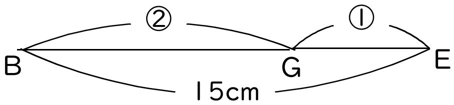
解答：問１～問２

問１．

（ｱ）線分ＧＥの長さを求めなさい。

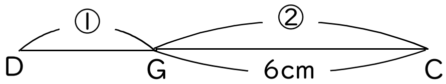


$$GE＝15\times\frac{1}{3}＝5 \quad or \quad 15\div3＝5$$



（ｲ）線分ＣＤの長さを求めなさい。

$$CD＝6\times\frac{3}{2}＝9 \quad or \quad 6\div2＝3 \quad 3\times3＝9$$

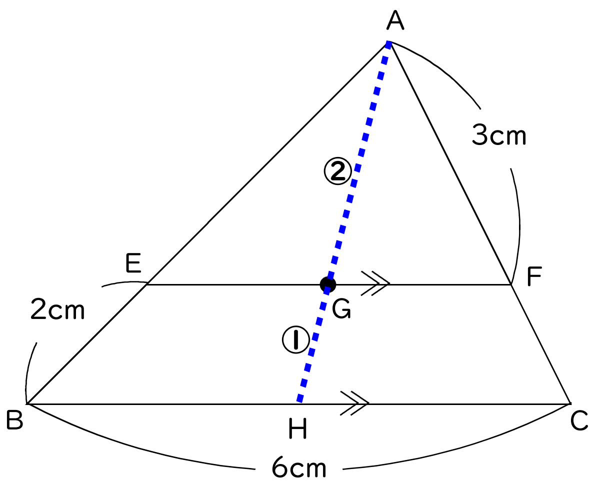


（ｳ）△ＡＢＣの面積が42㎠のとき、△ＢＣＤの面積と△ＢＧＤの面積を求めなさい。

高さが同じ三角形では、底辺の比＝面積比となります

△BCDの面積は，AD：DB＝１：１なので　　42÷2＝21
△BGDの面積は，DG：GC＝１：２なので　　21÷3＝7

問２．次の図で、線分ＥＦは辺ＢＣに平行で、△ＡＢＣの重心Ｇを通ります。このとき、線分ＡＥ，ＦＣ，ＥＦの長さを、それぞれ求めなさい。



Gは重心なので，AG：GH＝2：1

EF//BCより，AE：EB＝2：1

したがって，AE＝2×2＝4(cm)

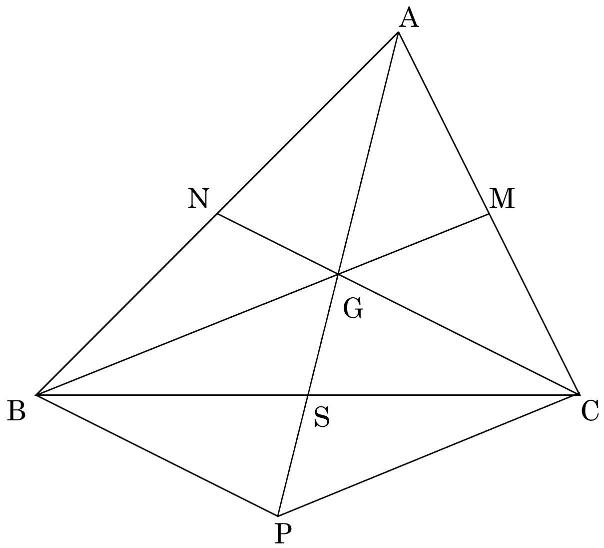
同様にして，AF：FC＝2：1なので，

$$FC＝3\div2＝\frac{3}{2}\ (cm)$$

EF：BC＝2：3なので，2：3＝EF：6
3EF＝12
EF＝4(cm)

＜重心の証明Ⅱ＞

三角形ABCで，2つの中線BM，CNの交点をGとする。
このとき，AとGを結んだ直線がもう1本の中線ALと一致することを示す。
⇒＜LがBCの中点になれば良い＞



AとGを結んだ直線をひき
AG＝GP　となる点Pをとり
BとP，CとPを結ぶ

NはABの中点，
MはACの中点，
GはAPの中点であるので

NG∥BP，MG∥CP

したがって，2組の向かいあう辺がそれぞれ平行なので
四角形BPCGは平行四辺形となる。

平行四辺形の対角線は，それぞれの中点で交わるので
APはBCの中点を通ります。
このことから，AとGを結んだ直線は，中線ALと一致します。

次に交わる位置を考えます。

NはABの中点，MはACの中点，GはAPの中点であるので

NG＝$\frac{1}{2}$BP，MG＝$\frac{1}{2}$CP

また，　四角形BPCGは平行四辺形であることから，

GC＝BPなので，NG＝$\frac{1}{2}$GC

つまり，点Gは中線CNを２：１に分ける点になっている。

同様に，BG＝CPなので，MG＝$\frac{1}{2}$BG

つまり，点Gは中線BMを２：１に分ける点になっている。

最後に，AG＝GP，GS＝SPより
点Gは中線ALを２：１に分ける点になっている。