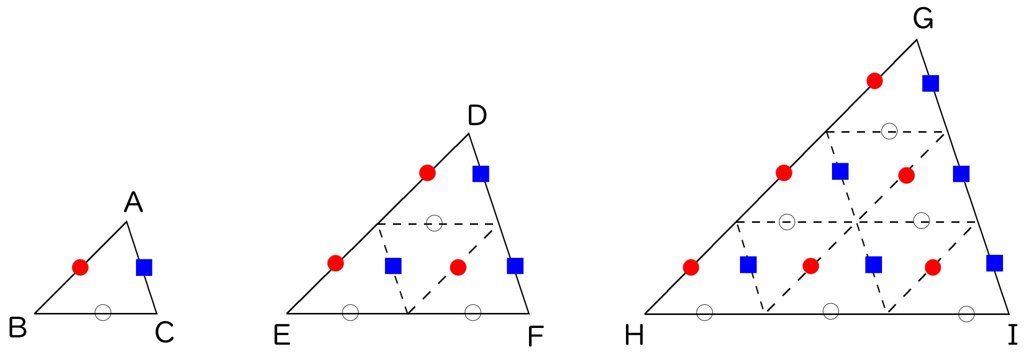
9　相似な図形の面積

◎ 相似な図形の相似比と面積比の関係

＜相似比と面積比の関係の考え方Ⅰ＞　⇒　中点連結定理の問３で学習した内容を使う方法

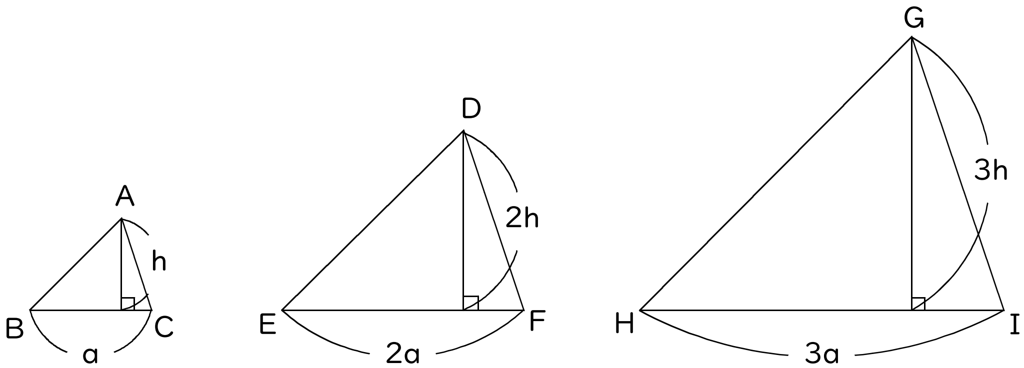
それぞれの辺の中点，三等分点をつなげると合同な三角形ができるので，
三角形の数を数えて面積を比べることができます。



相似比　1　:　2　:　3
面積比　1　:　4　:　9

＜相似比と面積比の関係の考え方Ⅱ＞　⇒　底辺と高さを文字で表して面積を比べる方法

底辺も２倍，高さも２倍なので，面積は２×２＝４倍になります
相似比を2回かけることになるので，相似比の２乗になります



相似比　1　:　2　:　3

△ＡＢＣの　底辺ＢＣを a，高さを h とすると

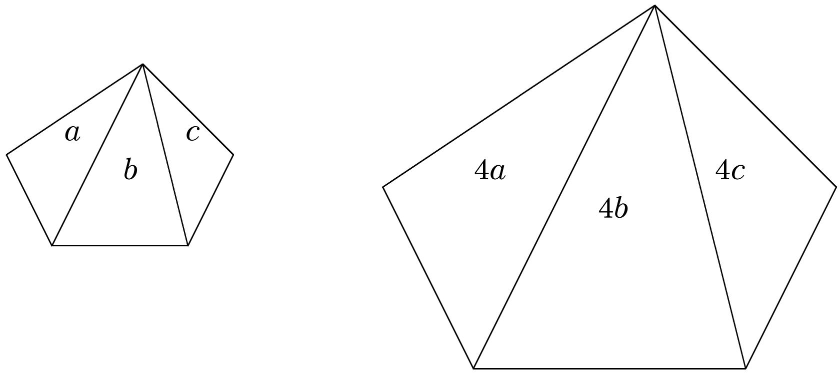
面積比　$a\times h\times\frac{1}{2}$　:　$2a\times 2h\times\frac{1}{2}$　:　$3a\times 3h\times\frac{1}{2}$

1　:　4　:　9

相似な図形の面積比は相似比の2乗になります

◎ 相似比と面積比の関係を相似な多角形に広げて考える

相似比1：2の2つの五角形の面積の比を，3つの三角形に分けて考えます
個々の三角形も相似なので，個々の三角形の面積比は　1：4　となり
多角形の面積は，その和なので合計すると　　　　　1：4　となります

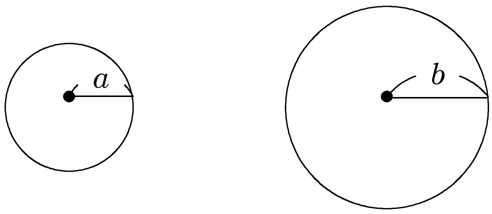


$(a + b + c)$　　　　　　$(4a + 4b + 4c) = 4(a + b + c)$

多角形になっても，(相似比)^2＝面積比となります

◎ 相似比と面積比の関係を相似な円に広げて考える

半径 a と b の円を考えると，相似比は $a:b$



面積を求めると　πa^2とπb^2　になるので，面積比は　$a^2:b^2$

おうぎ形の面積は円の面積を分けるだけなので、**おうぎ形でも同じ関係になります**

◎ 図形の面積を相似比と面積比の関係を使って求める

問1．次の各問いに答えましょう。
(ｱ)　△ABC∽△DEFで相似比が1：5，△ABCの面積が4cm^{2}のとき、△DEFの面積を求めましょう。

(ｲ)　△ABC∽△DEFで相似比が2：3，△ABCの面積が8cm^{2}のとき、△DEFの面積を求めましょう。

問２．相似比が５：３の相似な２つの図形Ｆ，Ｇがあります。このとき、次の問いに答えましょう。

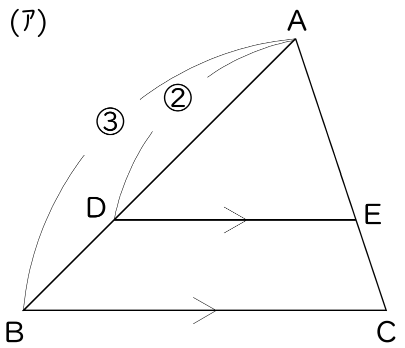
(ｱ) Ｇの面積が 90 cm^2 のとき、Ｆの面積を求めましょう。

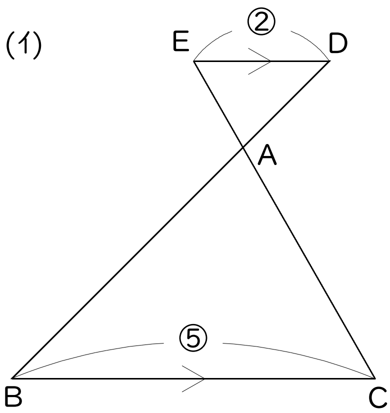
(ｲ) Ｆの面積が 200 cm^2 のとき、Ｇの面積を求めましょう。

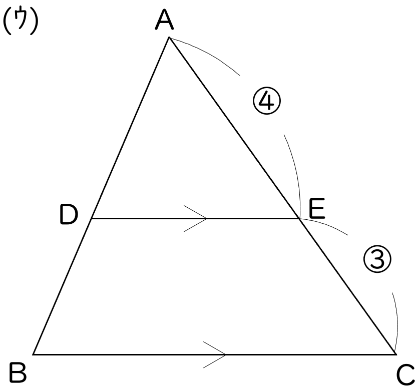
問３．相似な平面図形での，相似比と面積比の関係です。(　　)にあてはまる数字を書きましょう。

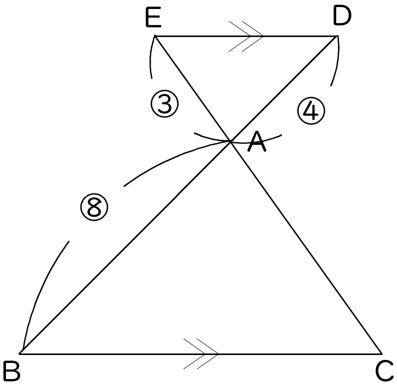
(ｱ) 相似比が １：２　なら　面積比は(　　)：(　　)
(ｲ) 相似比が １：k　なら　面積比は(　　)：(　　)
(ｳ) 相似比が ２：３　なら　面積比は(　　)：(　　)
(ｴ) 相似比が m：n　なら　面積比は(　　)：(　　)

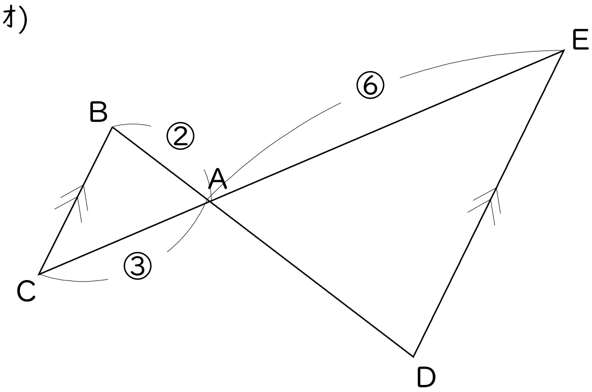
問４．次の各図において、BC ∥ DEです。
△ＡＤＥの面積を８cm^2とするとき、△ＡＢＣの面積を求めましょう。

(ｱ)


(ｲ)


(ｳ)


(ｴ)


(ｵ)


◎ 高さの等しい三角形の面積比は，底辺の比と等しい

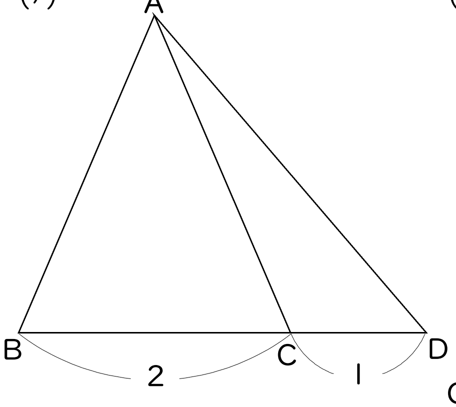
底辺	×	高さ	÷	2	＝	三角形の面積
底辺が２倍になった	×	高さは同じ	÷	2	＝	三角形の面積は２倍になる
底辺が３倍になった	×	高さは同じ	÷	2	＝	三角形の面積は３倍になる

◎ 底辺の等しい三角形の面積比は，高さの比と等しい

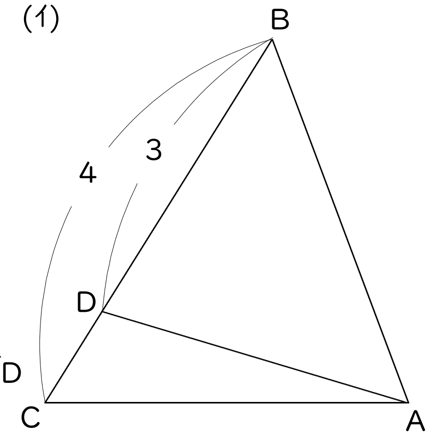
底辺	×	高さ	÷	2	＝	三角形の面積
底辺は同じ	×	高さが２倍になった	÷	2	＝	三角形の面積は２倍になる
底辺は同じ	×	高さが３倍になった	÷	2	＝	三角形の面積は３倍になる

問５．次の各図において、△ABCの面積を12cm^2とするとき、△ACDの面積を求めましょう。

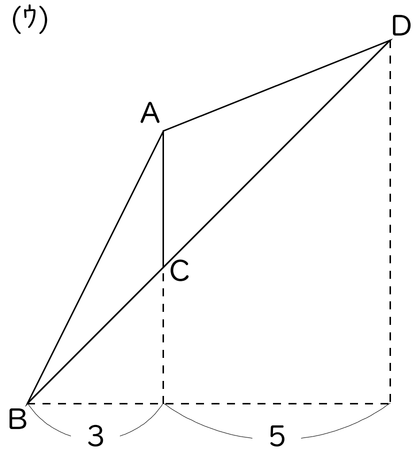
(ｱ)



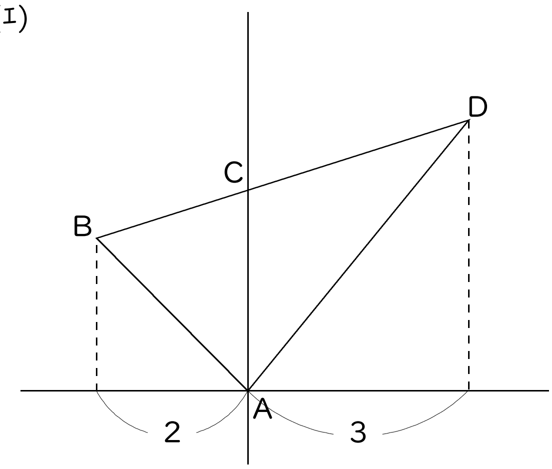
(ｲ)



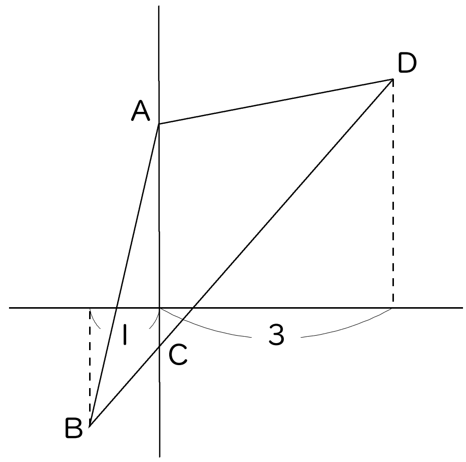
(ｳ)



(ｴ)

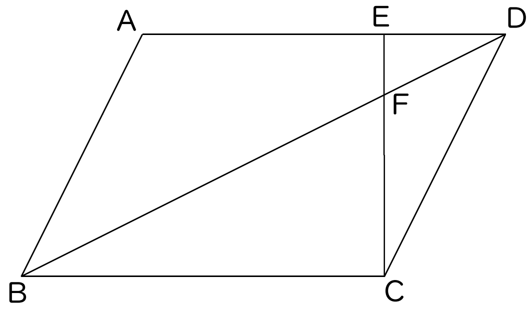


(ｵ)



問６．平行四辺形ABCDにおいて　AE：ED＝２：１で　△EFDの面積が２cm^2のとき

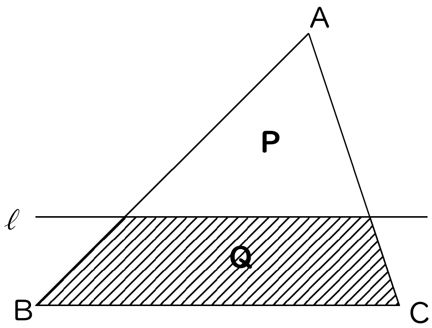
(ｱ)　△CFDの面積



(ｲ)　△BCFの面積

(ｳ)　平行四辺形ABCDの面積

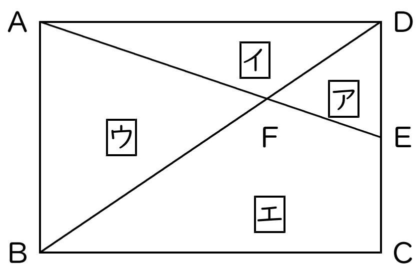
問７．



図のように、△ＡＢＣの辺ＢＣに平行な直線 ℓ が
辺ＡＢを２：１の比に分けています。
△ＡＢＣの面積が 45cm^2 のとき、
図の２つの部分　**P**，**Q**の面積を求めましょう。

◎　三角形の面積の比を文字で表す

問８．長方形ＡＢＣＤがあります。辺ＤＣの中点をＥとし、
線分ＡＥ，ＢＤで長方形を図のように、$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$、$\boxed{\text{エ}}$の
４つの部分に分けました。$\boxed{\text{ア}}$の面積をＳとするとき、
$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$、$\boxed{\text{エ}}$の面積を、それぞれＳを使って表しましょう。



解答：問１．

(ｱ) 相似比が△ABC：△DEF＝１：5，△ABCの面積が4cm²のときの△DEFの面積 $x$cm²は？

面積比は １：25になるので

１：25＝4：x　　△DEFの面積は25×4＝１00　　１00cm²

×4

(ｲ) 相似比が△ABC：△DEF＝2：3，△ABCの面積が8cm²のときの△DEFの面積 $x$cm²は？

面積比が 4：9になるので

4：9＝8：x　　△DEFの面積は9×2＝１8　　１8cm²

×2

問2．相似比が５：３の相似な２つの図形Ｆ，Ｇがあります。

(ｱ) Ｇの面積が 90 cm² のとき、Ｆの面積 $x$cm²は？

相似比が5：3なので

面積比は25：9　　25：9＝ x：90　　Ｆの面積は 25×１0＝250　　250cm²

×１0

(ｲ) Ｆの面積が 200 cm² のとき、Ｇの面積 $x$cm²は？

面積比は25：9　　25：9＝200：Ｇ　　Ｇの面積は 9×8＝72　　72cm²

×8

問3．(ｱ) 相似比が １：2 なら 面積比は(１)：(4)

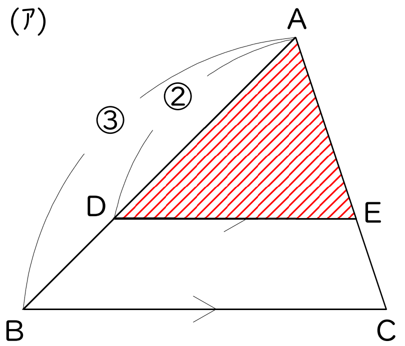
(ｲ) 相似比が １：k なら 面積比は(１)：(k^2)

(ｳ) 相似比が 2：3 なら 面積比は(4)：(9)

(ｴ) 相似比が m：n なら 面積比は(m^2)：(n^2)

問4．BC//DEより△ADE∽△ABC。△ADEの面積を８cm²とするとき、△ABCの面積 $x$cm²は？

(ｱ)



相似比　2：3

面積比　4：9

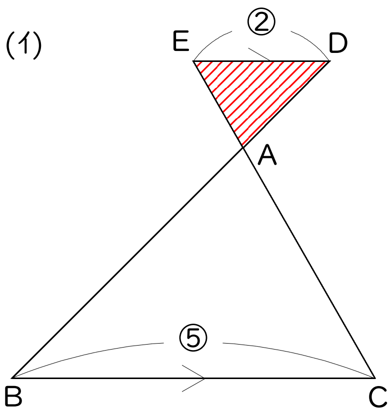
4：9＝8：x

×2

9×2＝１8

１8cm²

(ｲ)



相似比　2：5

面積比　4：25

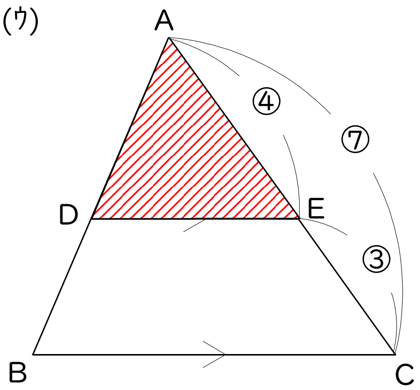
4：25＝8：x

×2

25×2＝50

50cm²

(ｳ)



相似比　4：7

面積比　１6：49

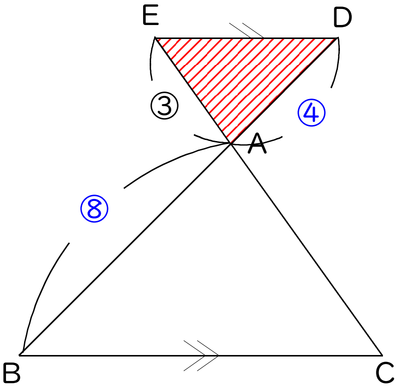
１6：49＝8：x

÷2

$49\div2=\dfrac{49}{2}$ or 24.5

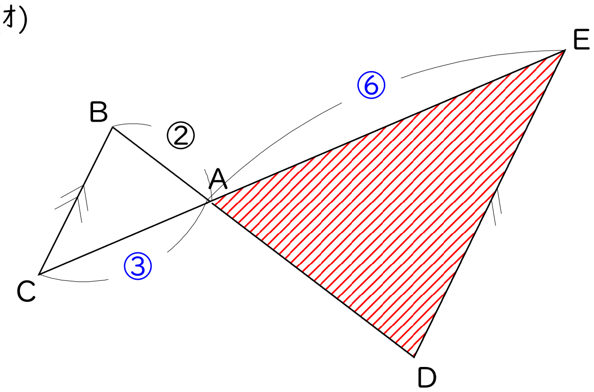
24.5cm²

(エ)



相似比　4：8＝１：2
面積比　　　　１：4
１：4＝8：x
×8
4×8＝32
32cm²

(オ)

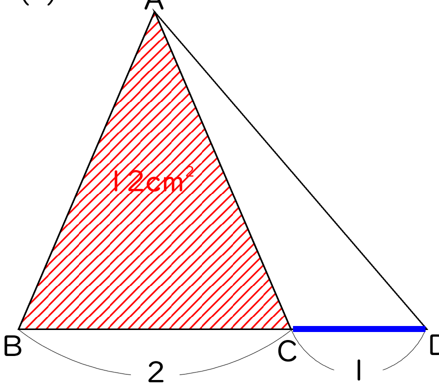


相似比　6：3＝2：１
面積比　　　4：１
4：１＝8：x
×2
１×2＝2
2cm²

比の解き方はいくつかあります。今回は、ナカナカソトソトではなく、何倍の考え方で解いています。
自分のやりやすい方法で解きましょう。

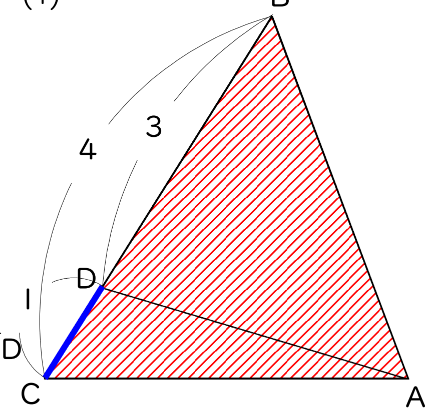
問５．次の各図において、△ABCの面積を１2cm²とするとき、△ACDの面積を求めましょう。

(ア)



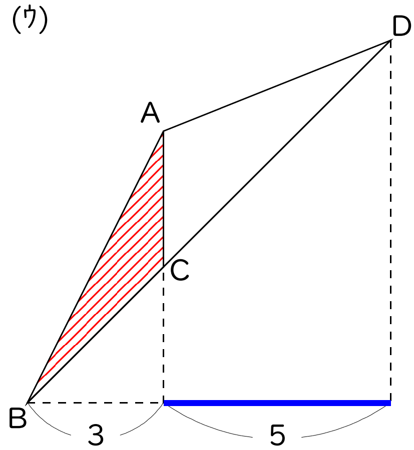
１2÷2＝6　　6cm²

(イ)



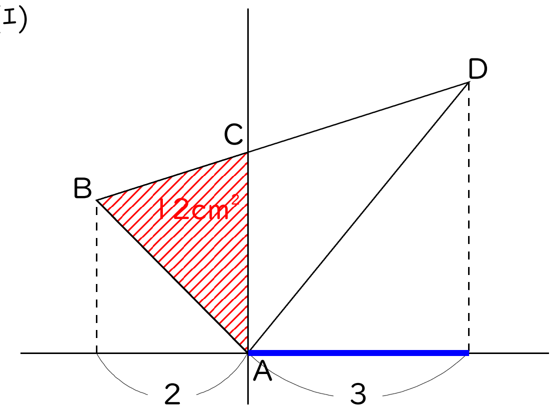
１2÷4＝3　　3cm²

(ウ)



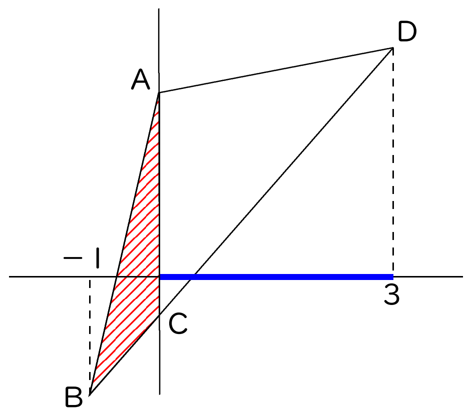
3：5＝１2：x
x ＝5×4＝20　　20cm²

(エ)



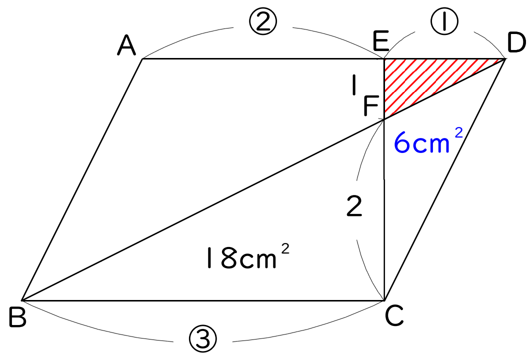
2：3＝１2：x
x ＝3×6＝１8　　１8cm²

(オ)



１：3＝１2：x
x ＝１2×3＝36　　36cm²

問６． 平行四辺形ABCDにおいて AE：ED＝２：１で △EFDの面積が２cm²のとき



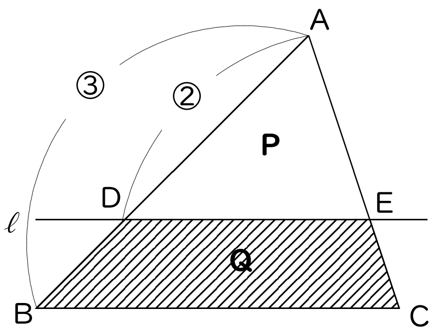
(ｱ) △CFDの面積
底辺の長さが2倍あるので
2×3＝6　　6cm²

(ｲ) △BCFの面積
△EFD∽△BCFで相似比は１：３なので
面積比は１：９となる
2×9＝18　　18cm²

底辺の比を使うこともできる　BF：FD＝3：1
△CFD＝6cm² より　　6×3=18　　18cm²

(ｳ) 平行四辺形ABCDの面積
△DBCの面積は　6＋18＝24
平行四辺形ABCDの面積は　その2倍になるので　24×2＝48　　48cm²

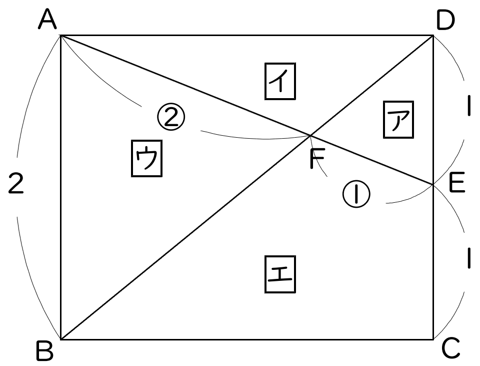
問７．



図のように、△ＡＢＣの辺ＢＣに平行な直線 ℓ が
辺ＡＢを２：１の比に分けています。
△ＡＢＣの面積が 45cm² のとき、
図の２つの部分 **P**，**Q**の面積を求めましょう。

△ADE∽△ABCで　相似比は2：3　面積比は4：9
4：9＝P：45　をたまにはナカナカソトソトで
9P＝180　　P(△ADE)＝20
5倍で4×5＝20でも良い　　Pは20cm²
Qは△ABC－△ADEなので
Q＝45－20＝25　　Qは25cm²

問８．



辺ＤＣの中点をＥとし、線分ＡＥ，ＢＤで
$\boxed{\text{ア}}$、$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$、$\boxed{\text{エ}}$の４つの部分に分けました。

$\boxed{\text{ア}}$の面積をＳとするとき、
$\boxed{\text{イ}}$、$\boxed{\text{ウ}}$、$\boxed{\text{エ}}$の面積を、それぞれＳを使って表しましょう。

底辺の比を使って　$\boxed{\text{イ}}$は$\boxed{\text{ア}}$の2倍なので 2S

底辺の比を使って　$\boxed{\text{ウ}}$は$\boxed{\text{イ}}$の2倍なので 4S
相似比を使うと　$\boxed{\text{ア}}$：$\boxed{\text{ウ}}$＝１：４なので4Sでも良い

長方形の半分は 6Sになるので　$\boxed{\text{エ}}$は 6S－S＝5S

面積の求め方　① 相似になっている三角形の面積比＝ 相似比の2乗の比
② 高さの等しい三角形の面積の比　＝ 底辺の比
③ 底辺の等しい三角形の面積の比　＝ 高さの比

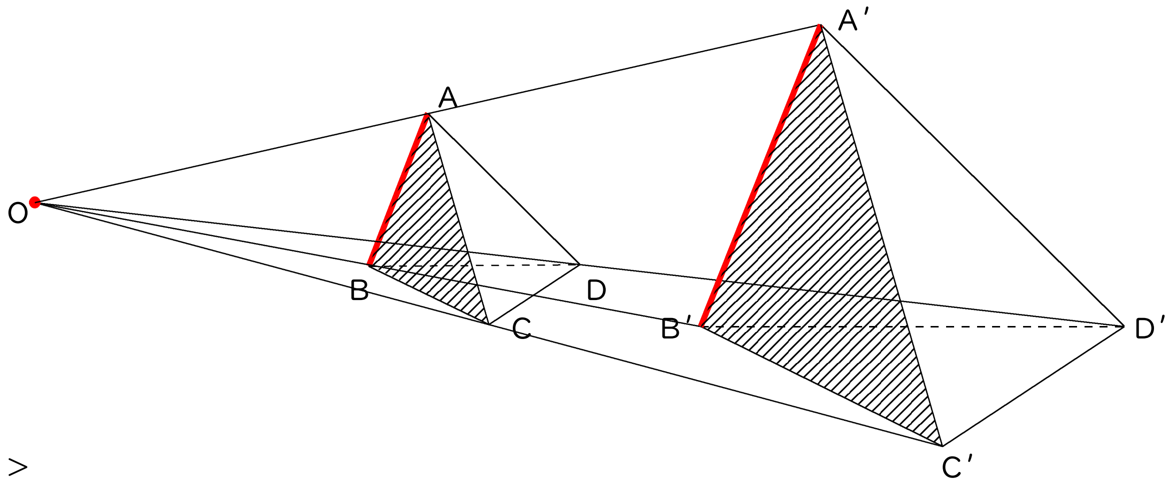
１０　相似な図形の表面積・体積

◎ 相似な立体と表面積比

＜立体の相似＞

空間でも、平面と同じように、図形を拡大したり縮小したりして、相似な立体を作ることができます。
四面体ＡＢＣＤを２倍にした四面体Ａ'Ｂ'Ｃ'Ｄ'を作るには，

ＯＡ：ＯＡ'＝ＯＢ：ＯＢ'＝ＯＣ：ＯＣ'＝ＯＤ：ＯＤ'＝１：２となるように作ります。



＜説明＞

平面図形と同じ様に考えると

Ａ，Ｂ，ＣはＯＡ'，ＯＢ'，ＯＣ'のそれぞれ中点なので，中点連結定理より

ＯＡ：ＯＡ'＝ＯＢ：ＯＢ'＝１：２，　∠ＡＯＢ＝∠Ａ'ＯＢ'より

△ＯＡＢ∽△ＯＡ'Ｂ' になるので　　ＡＢ：Ａ'Ｂ'＝（　１　）:（　２　）　…　①

同様にして△ＯＢＣ∽△ＯＢ'Ｃ' より　ＢＣ：Ｂ'Ｃ'＝（　１　）:（　２　）　…　②

同様にして△ＯＣＡ∽△ＯＣ'Ａ' より　ＣＡ：Ｃ'Ａ'＝（　１　）:（　２　）　…　③

①，②，③より　３組の辺の比がすべて等しいので　　△ABC　∽　△（　△A'B'C'　）となり

その相似比は（　１　）:（　２　）で　　面積比は（　１　）:（　４　）

同様に，他の面もそれぞれ相似になるので，

立体として全体を見ると，四面体ABCD∽四面体A'B'C'D'となり，その表面積比は１：４となります。

＜表面積比も１：４となる説明＞

△ABCの面積を a とすると，　△A'B'C'の面積は4a

△ACDの面積を b とすると，　△A'C'D'の面積は4b

△ABDの面積を c とすると，　△A'B'D'の面積は4c

△BCDの面積を d とすると，　△B'C'D'の面積は4d となり

四面体ABCDの表面積は，　$a+b+c+d$

四面体A'B'C'D'の表面積は，$4a+4b+4c+4d=4(a+b+c+d)$

したがって　四面体ABCDの表面積：四面体A'B'C'D'の表面積＝１：４

◎ 相似な立体の性質

相似な２つの立体では，

① 立体の相似比は，対応する（ 線分 ）の長さの比の値です。

② 対応する辺の長さの比は（ 相似比 ）等しい。

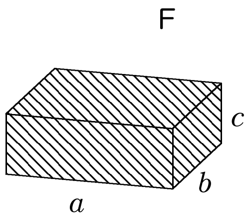
③ 対応する（ 角 ）の大きさはそれぞれ等しい。

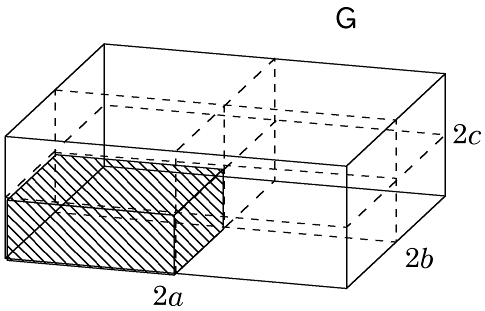
④ 対応する面は，それぞれ（ 相似 ）です。

対応する面の相似比は，もとの立体の（ 相似比 ）に等しい。

◎ 相似な立体の表面積比と体積比

直方体F ∽ 直方体G で相似比は１：２とするとき





・Fの体積：Gの体積＝１：8

Gには，直方体Fが8個あるので8倍

縦と横と高さは，それぞれが2倍なので　２×２×２＝8倍

体積を文字で計算すると　abc ： $8abc$

・Fの底面積：Gの底面積＝１：4

Gの底面には，直方体Fの底面が4個あるので4倍

底面の縦と横がともに2倍なので　２×２＝4倍

底面積を文字で計算すると　ab ： $4ab$

・Fの側面積：Gの側面積＝１：4

4つの側面は，それぞれが4倍の面積で，その和なので4倍

側面積を文字で計算すると，

$ac + bc + ac + bc$ ： $4ac + 4bc + 4ac + 4bc$

$ac + bc + ac + bc$ ： $4(ac + bc + ac + bc)$

・Fの表面積：Gの表面積＝１：4

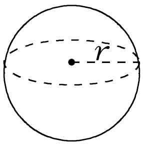
底面積の比も，側面積の比も１：4で，その和なので4倍

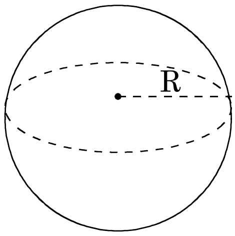
表面積を文字で計算すると，側面積＋底面積

$(ac + bc + ac + bc + ab \times 2)$：$4(ac + bc + ac + bc + ab \times 2)$

面積関係の比はすべて2乗，体積の比は3乗になります

問１．すべての球同士は相似な図形ですが、半径が r，Rである2つの球の表面積比と体積比を求め，
相似比の2乗，相似比の3乗になっているか確かめましょう。





相似な立体図形では，次のことがいえます。

相似比が １：2のとき，　表面積比は １：4，　体積比は １：8
相似比が １：k のとき，　表面積比は １：k^2，　体積比は １：k^3
相似比が ２：3のとき，　表面積比は ４：9，　体積比は ８：27
相似比が m：n のとき　表面積比は m^2：n^2，　体積比は m^3：n^3

◎ 図形の体積や表面積を相似比を利用して求める

問２．相似な２つの三角錐Ｆ，Ｇがあって、その相似比は３：２です。

(ｱ) Ｇの表面積が 40 cm^2、体積が16 cm^3のときの、Ｆの表面積、体積を求めましょう。

(ｲ) Ｆの表面積が 180cm^2、体積が81 cm^3 のとき、Ｇの表面積、体積を求めましょう。

問３．相似な２つの三角錐Ｆ，Ｇがあって、その相似比は３：４です。

(ｱ) Ｇの表面積が80 cm^2のとき、Ｆの表面積を求めましょう。

(ｲ) Ｆの体積が270cm^3のとき、Ｇの体積を求めましょう。

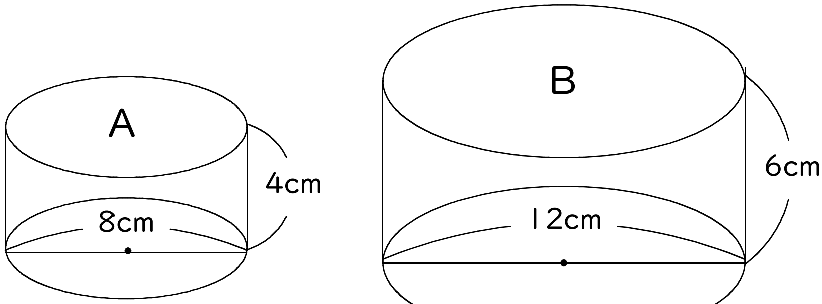
問４．相似な２つの円柱Ｆ，Ｇがあり、その高さの比は２：３です。

(ｱ) ＦとＧの底面の周の長さの比を求めましょう。

(ｲ) ＦとＧの表面積の比を求めましょう。

(ｳ) Ｆの体積が80 cm^3ならば、Ｇの体積は何cm^3ですか。

問５．相似な円柱の形のアイスクリームA，Bがあります。
600円で、Aを6個買うのとBを2個買うのとでは、どちらがお得ですか。



１個　100円　　　１個　300円

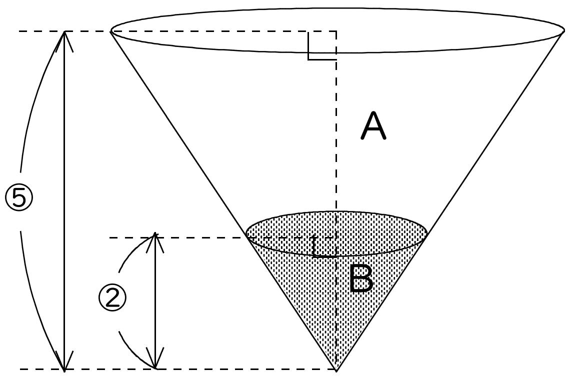
相似比
A　：　B
(　　　)：(　　　)

体積比
A　：　B
(　　　)：(　　　)

Aを6個　　Bを2個
(　　　)：(　　　)

お得なのは（　　　）

問６．コップいっぱいに入れた水を，右のような円錐の形をした容器に入れたところ，容器の深さの$\frac{2}{5}$のところまで，水が入りました。同じコップを使って，この容器を満水にするには，少なくともあと何回水を入れることが必要ですか。



相似比　(A＋B)：B＝(　　　)：(　　　)

体積比　(A＋B)：B＝(　　　$)^3$：(　　　$)^3$

＝(　　　　)：(　　　　)

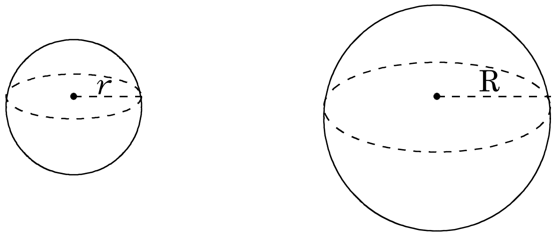
体積比　A：B＝(　　　　)：(　　　　)

コップ一杯分は(　　　)なので

(　　　　)÷(　　　)＝(　　　　)

したがって，少なくともあと(　　　)回水を入れる

解答：問１．2つの球の表面積比が相似比の2乗，体積比が相似比の3乗になっているか？



相似比は半径なので　r：R

表面積を求めると　$4\pi r^2 : 4\pi R^2$　表面積比は　$r^2 : R^2$　相似比の2乗に等しくなった

体積を求めると　$\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{4}{3}\pi R^3$　体積比は　$r^3 : R^3$　相似比の3乗に等しくなった

問２．三角錐Ｆ∽三角錐Ｇ、相似比は３：２⇒ 表面積比は9：4，体積比は27：8

(ｱ)　Ｇの表面積が 40 cm²、体積が 16 cm³のとき

9：4＝F：40
×10　　Fの表面積は，9×10＝90　　90 cm²

27：8＝F：16
×2　　Fの体積は，27×2＝54　　54 cm³

(ｲ)　Ｆの表面積が 180cm²、体積が81 cm³ のとき

9：4＝180：G
×20　　Gの表面積は，4×20＝80　　80 cm²

27：8＝81：G
×3　　Gの体積は，8×3＝24　　24cm³

問３．三角錐Ｆ∽三角錐Ｇ、その相似比は３：４⇒ 表面積比は9：16，体積比は27：64

(ｱ)　Ｇの表面積が80 cm²のとき

9：16＝F：80　　Fの表面積は，9×5＝45　　45 cm²
×5

(ｲ)　Ｆの体積が270cm³のとき

27：64＝270：G　　Gの体積は，64×10＝640　　640 cm³
×10

問４．相似な２つの円柱Ｆ，Ｇがあり、その高さの比は２：３

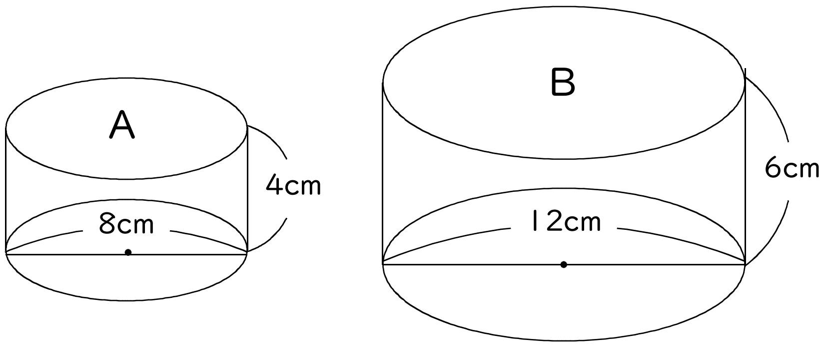
(ｱ)　ＦとＧの底面の周の長さの比　　長さの比は，相似比に等しくなるので，2：3

(ｲ)　ＦとＧの表面積の比　　面積比は，相似比の2乗になるので，4：9

(ｳ)　Ｆの体積が80 cm³　　体積比は，相似比の3乗になるので，8：27

8：27＝80：G
×10　　Gの体積は，27×10＝270　　270 cm³

問５．相似な円柱の形のアイスクリームA，Bがあります。
600円で、Aを6個買うのとBを2個買うのとでは、どちらがお得ですか。



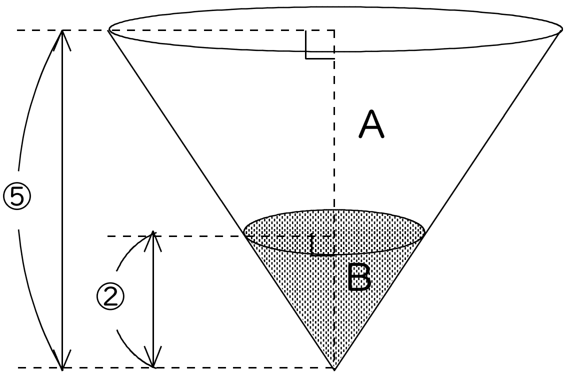
１個　100円　　１個　300円

相似比
A　：　B
（ 2 ）:（ 3 ）
体積比
A　：　B
（ 8 ）:（ 27 ）

Aを6個　Bを2個
（ 48 ）:（ 54 ）

お得なのは（　B　）

問６．コップいっぱいに入れた水を，右のような円錐の形をした容器に入れたところ，
容器の深さの$\frac{2}{5}$のところまで，水が入りました。同じコップを使って，この容器を満水にするには，
少なくともあと何回水を入れることが必要ですか。



相似比　(A＋B)：B＝(　5　)：(　2　)

体積比　(A＋B)：B＝(　5　)^3：(　2　)^3
＝(　125　)：(　8　)

体積比　A：B＝(　117　)：(　8　)

コップ一杯分は(　8　)なので

(　117　)÷(　8　)＝(　14.625　)

したがって，少なくともあと(　15　)回水を入れる