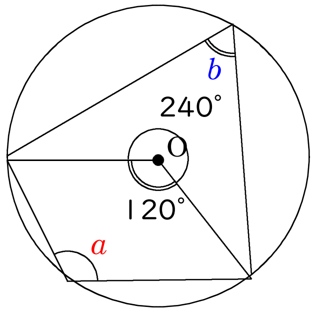
5　円に内接する四角形

◎ 円に内接する四角形の性質

☆ 四角形の４つの頂点が１つの円の周上にあるとき、この四角形は円に内接するといいます。



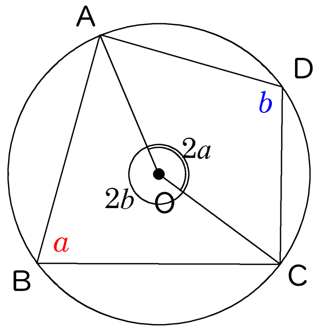
「$\angle a + \angle b$ 」の角度を求めてみると

$\angle a = 240 \div 2 = 120$

$\angle b = 120 \div 2 = 60$

$\angle a + \angle b = (360 \div 2) = 180$

向かい合っている2角をたすといつも180°になりそうだ!!



＜証明＞

Ⅰ　円周角の定理により

弧ＡＤＣに対する円周角，中心角により

$\angle \mathrm{B} = a$，$\angle \mathrm{AOC} = 2a$

弧ＡＢＣに対する円周角，中心角により

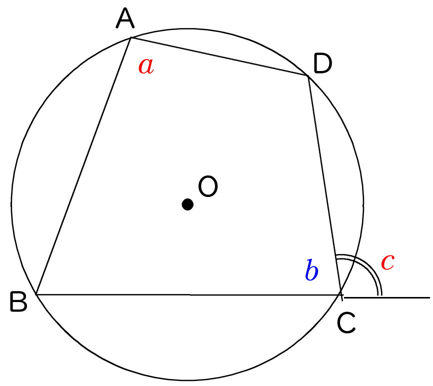
$\angle \mathrm{D} = b$，$\angle \mathrm{AOC} = 2b$

$2a + 2b = 360^\circ$ なので

$\therefore\quad a + b = 180^\circ$

つまり、円に内接する四角形の向かいあう内角の和は180°である。

＜Ⅰの応用＞



Ⅱ　四角形ＡＢＣＤは円Ｏに内接しているので

$a + b = 180^\circ$

直線なので　$c + b = 180^\circ$

$\therefore\quad a = c$

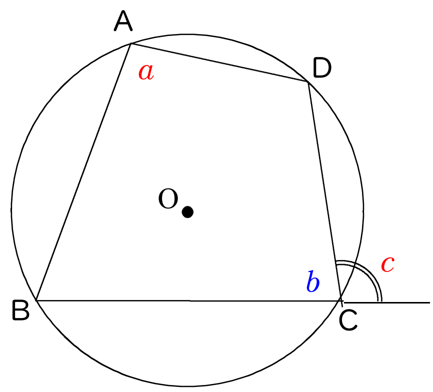
円に内接する四角形の性質

Ⅰ．円に内接する四角形の向かいあう内角の和は１８０°である。

$a + b = 180^\circ$

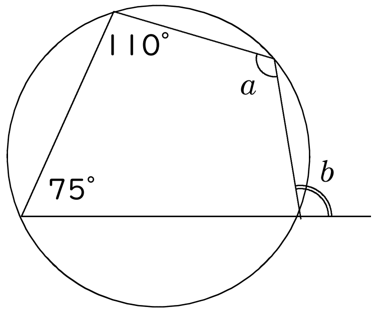
Ⅱ．円に内接する四角形の１つの内角は、それに向かうあう内角の、となりにある外角に等しい。

$a = c$

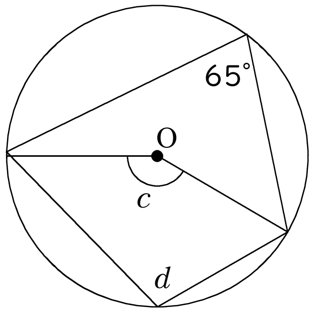


問１．次の各図の角度を求めなさい。（点Oは円の中心）

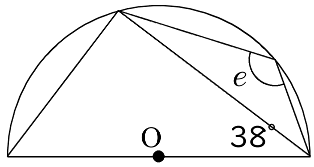
(ｱ)



(ｲ)



(ｳ)

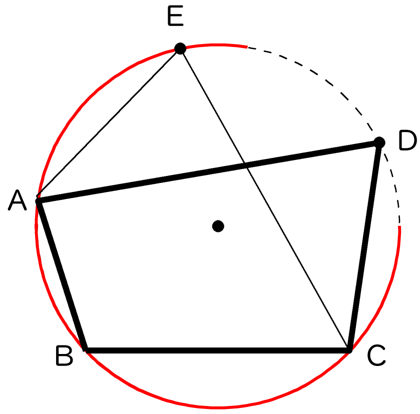


◎ 円に内接する四角形の性質Ⅰの逆

＜証明＞

∠Ｂ＋∠Ｄ＝180°のとき、△ＡＢＣの外接円をかき、
円Ｏに内接する四角形ＡＢＣＥをつくると
円に内接する四角形の性質により
∠Ｂ＋∠Ｅ＝180°となるので、∠Ｄ＝∠Ｅ

したがって円周角の定理の逆により、
点Ｄは円Ｏの周上にあることになる。



四角形が円に内接する条件

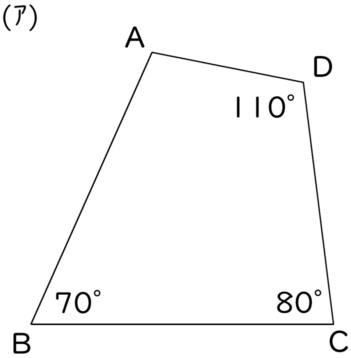
Ⅰ．向かいあう内角の和が180°の四角形は、円に内接する。

Ⅱ．１つの内角が、それに向かいあう内角の隣にある外角に等しい四角形は、円に内接する。

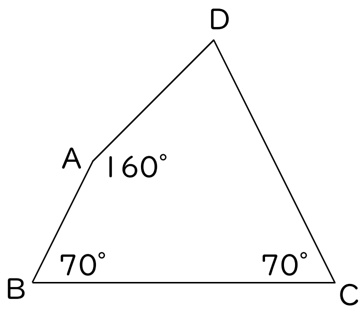
Ⅲ．２点Ｐ，Ｑが直線ＡＢの同じ側にあって、∠ＡＰＢ＝∠ＡＣＢならば
４点Ａ，Ｂ，Ｐ，Ｑは同じ円周上にある。

問２．次の四角形ＡＢＣＤのうち、円に内接するものはどれですか。

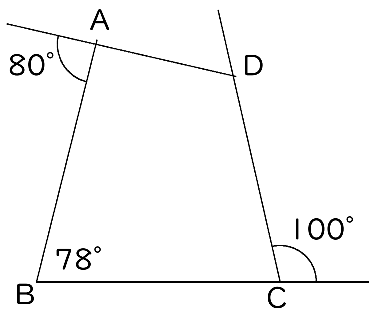
(ｱ)



(ｲ)



(ｳ)

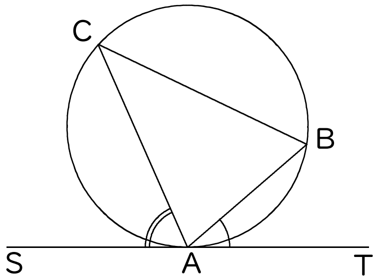


◎ 接線と弦のつくる角の性質

円の接線と弦ＡＢのつくる角∠ＴＡＢ や

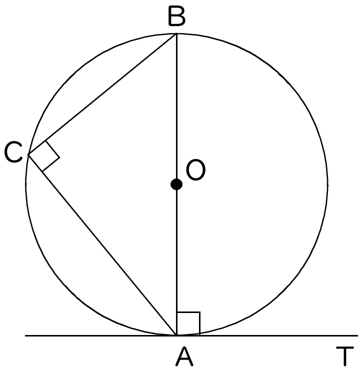
円の接線と弦ＡＣのつくる角∠ＳＡＣ を

（　接線と弦のつくる角　）　といいます。



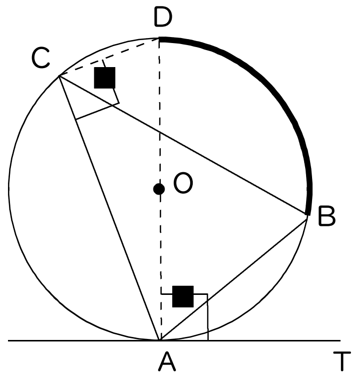
このとき、∠ＴＡＢ＝∠ＡＣＢになることを３つの場合に分けて証明します。

(1)∠ＴＡＢ＝90°の時



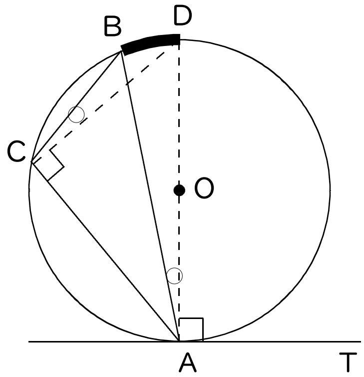
∴∠ＴＡＢ＝∠ＡＣＢ＝90°

(2)∠ＴＡＢ＜90°の時



∠ＴＡＢ＝90°－■
∠ＡＣＢ＝90°－■
∴∠ＴＡＢ＝∠ＡＣＢ

(3)∠ＴＡＢ＞90°の時



∠ＴＡＢ＝90°＋○
∠ＡＣＢ＝90°＋○
∴∠ＴＡＢ＝∠ＡＣＢ

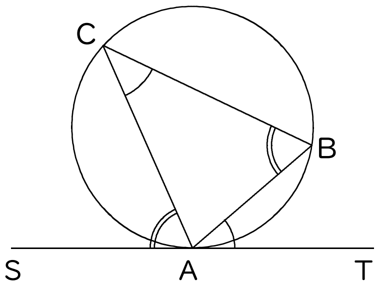
接線と弦のつくる角（接弦定理）

円の接線とその接点を通る弦のつくる角は、

その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

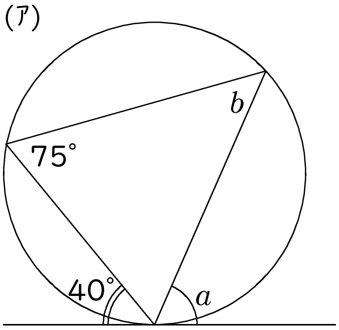
∠ＴＡＢ＝∠ＡＣＢ

∠ＳＡＣ＝∠ＡＢＣ

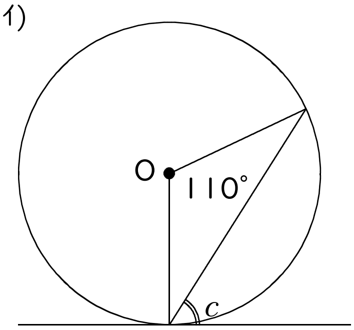


問３．次の各図の角度を求めなさい。（点Ｏは円の中心）

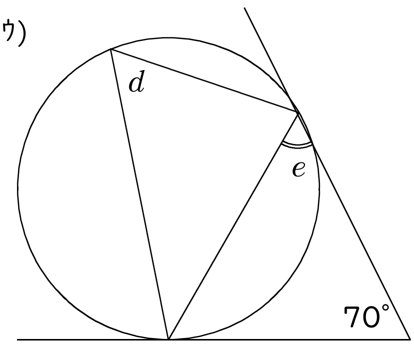
(ｱ)



(ｲ)

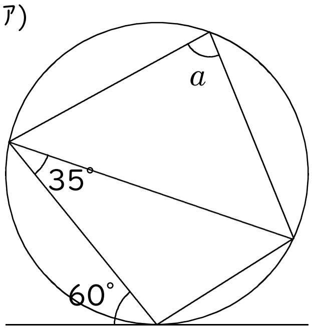


(ｳ)

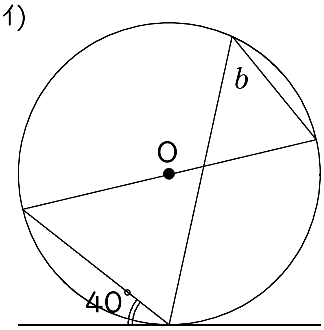


問４．次の各図の角度を求めなさい。（点Oは円の中心）

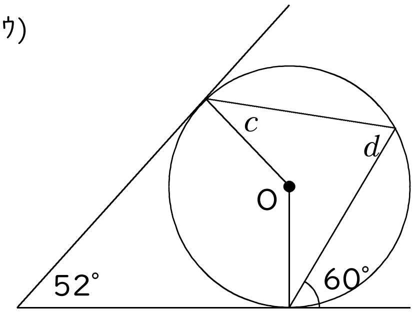
(ｱ)



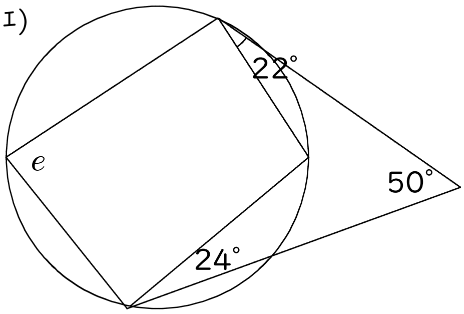
(ｲ)



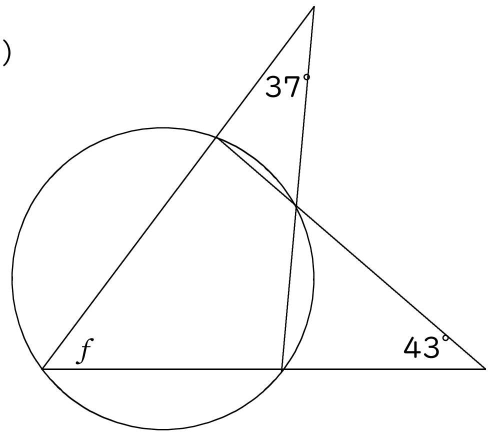
(ｳ)



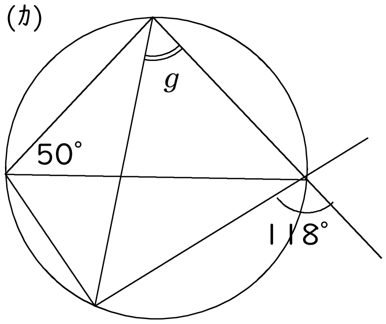
(ｴ)



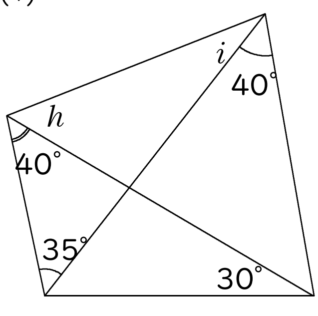
(ｵ)



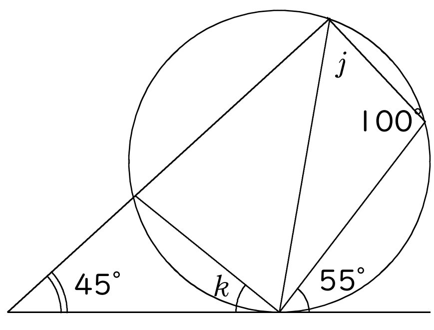
(ｶ)



(ｷ)



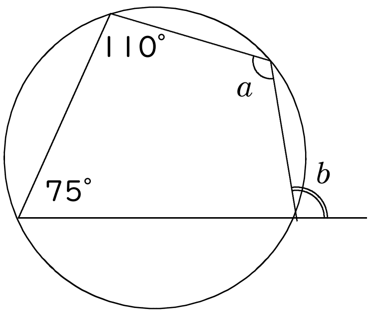
(ｸ)



解答：

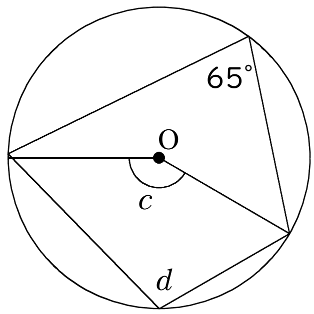
問１．

(ｱ)



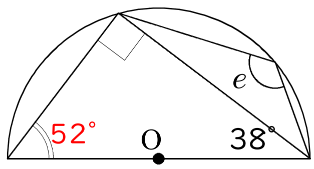
$a = 180 - 75 = 105$
$b = 110$

(ｲ)



$c = 65 \times 2 = 130$
$d = 180 - 65 = 115$

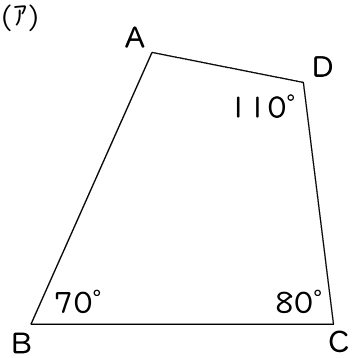
(ｳ)



$90 - 38 = 52$
$e = 180 - 52 = 128$

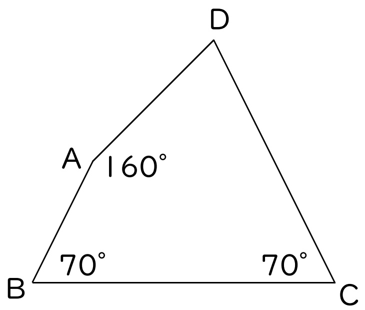
問２．次の四角形ＡＢＣＤのうち、円に内接するものは　(ｱ)と(ｳ)

(ｱ)

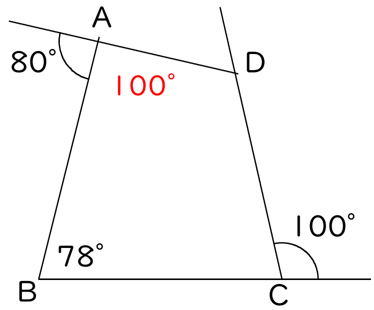


$110 + 70 = 180$

(ｲ)



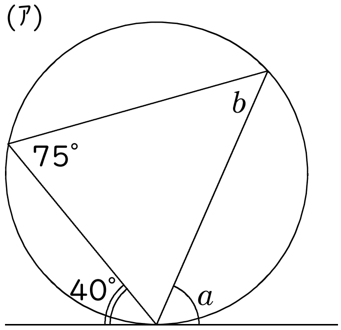
(ｳ)



$100 = 100$

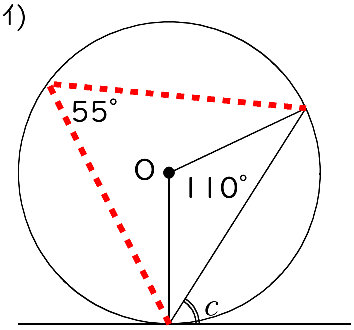
問３．他の解き方でも勿論構いません。

(ｱ)



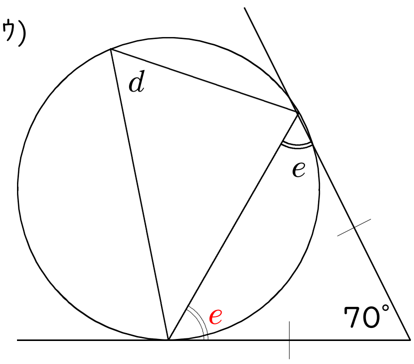
$a = 75$
$b = 40$

(ｲ)



$c = 110 \div 2 = 55$

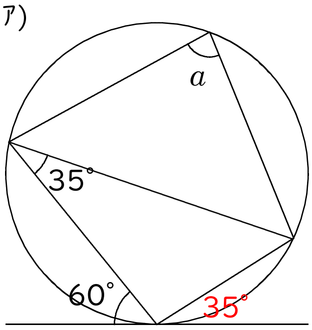
(ｳ)



$(180 - 70) \div 2 = 55$
$d = e = 55$

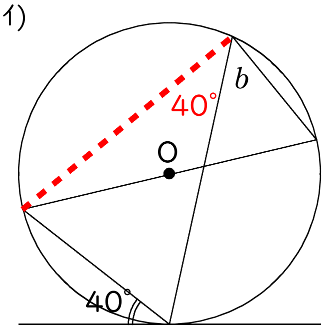
問４．他の解き方でも勿論構いません。

(ア)



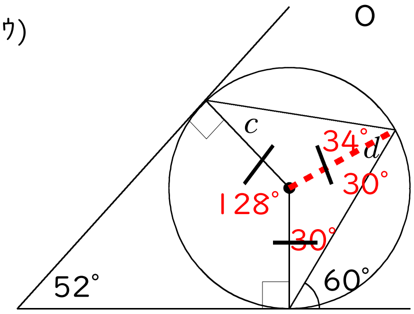
$a = 180 - (60 + 35)$
$a = 85$

(イ)



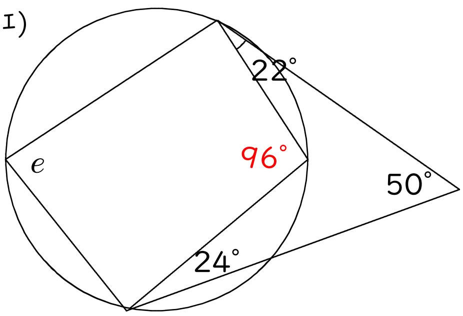
$b = 90 - 40 = 50$

(ウ)



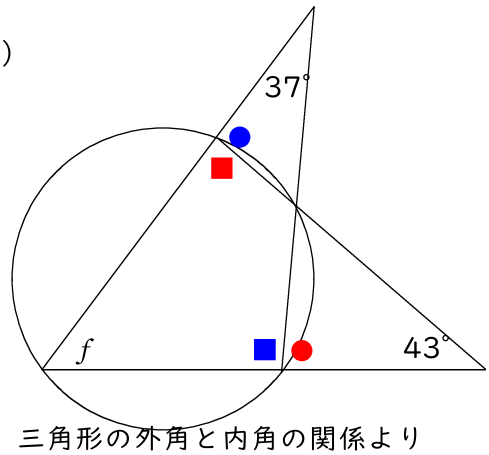
$180 - 52 = 128$
$d = 128 \div 2 = 64$
$90 - 60 = 30$
$c = 64 - 30 = 34$
＜くさび形の公式を使うと＞
$c = 128 - 64 - 30 = 34$

(エ)



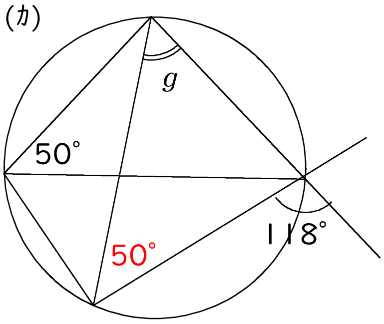
＜くさび形の公式＞
$50 + 22 + 24 = 96$
$e = 180 - 96 = 84$

(オ)



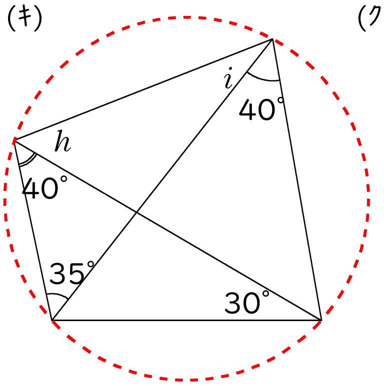
三角形の外角と内角の関係より
●$= f + 37$　●$= f + 43$
内接する四角形の性質より
●＝■　●＝■　なので
$(f + 37) + (f + 43) = 180$
$2f = 100$
$f = 50$

(カ)



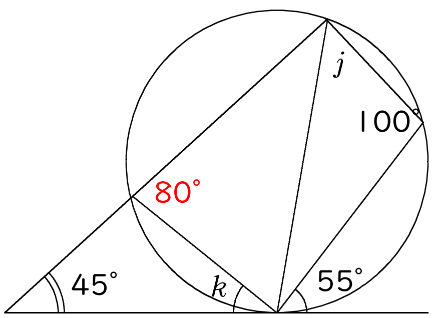
$g = 118 - 50 = 68$

(キ)



円周角の定理の逆より
同一円周上にあることが分かる
$i = 30$
$h = 180 - 40 - 35 - 30 = 75$

(ク)

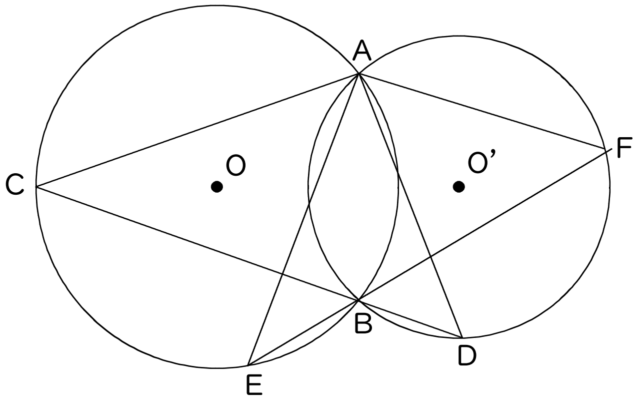


接弦定理より　$j = 55$
$180 - 100 = 80$
$45 + k = 80$
$k = 35$

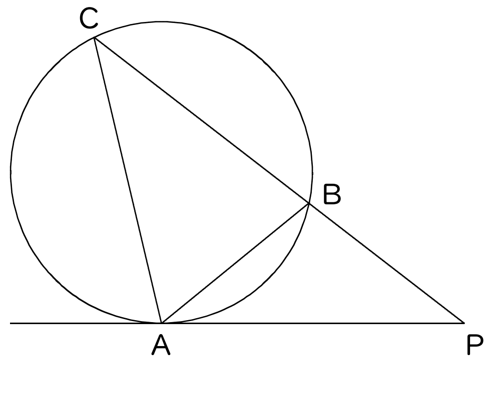
練習問題

問．次の各問いに答えなさい。

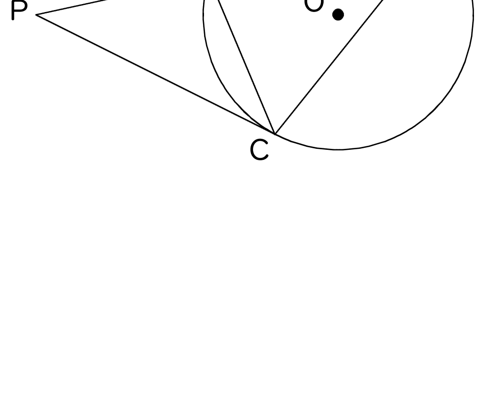
(ｱ) ２点A,Bで交わる2円O，O’がある。点Bを通る2直線が、図のように、円O，O’とそれぞれ　C，DおよびE，Fで交わっているとき、△ＡＣＤ∽△ＡＥＦである。これを証明しなさい。



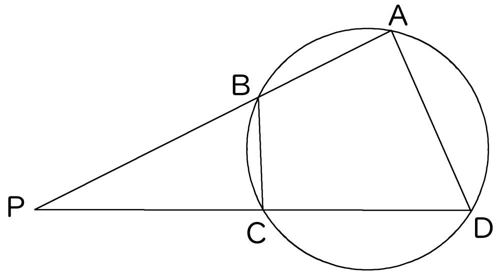
(ｲ) 円外の点Ｐから、接線ＰＡと円周上の２点Ｂ，Ｃで交わる直線ＰＢをひく。
このとき、△ＰＡＢ∽△ＰＣＡである。これを証明しなさい。



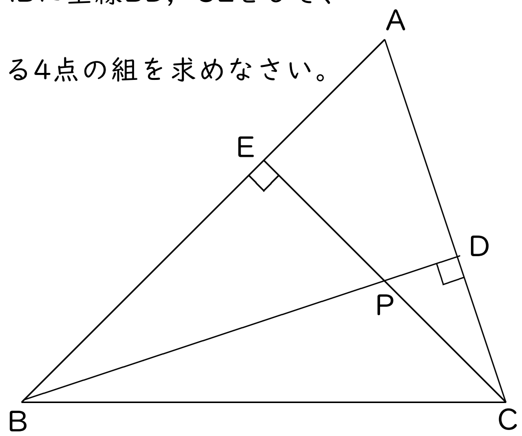
(ｳ) △ＡＣＢは円に内接し、ＰＣは円の接線である。
ＰＡ＝4cm，ＡＢ＝5cm，ＰＣ＝6cmのとき、
ＡＣとＣＢの長さの比を、最も簡単な整数の比で表しなさい。



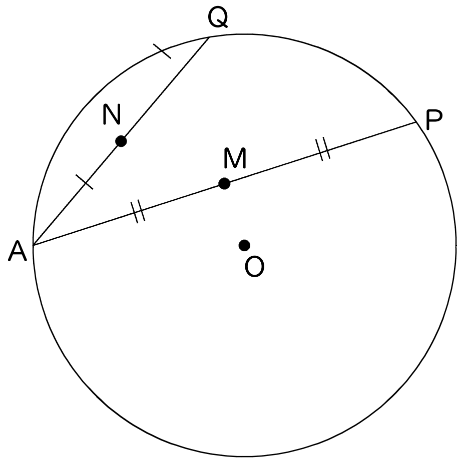
(ｴ) 右の図で、四角形ＡＢＣＤは円に内接し、ＰはＡＢの延長とＤＣの延長との交点である。
ＢＣ＝2cm，ＣＤ＝4cm，ＤＡ＝3cm，ＰＢ＝7cmのとき、ＰＣの長さを求めなさい。



(ｵ) △ABCで、頂点B，Cから、それぞれ、AC，ABに垂線BD，CEをひき、
その交点をPとします。
点A，B，C，D，E，Pのうち、同じ円周上にある4点の組を求めなさい。
組合せは2通りあります。

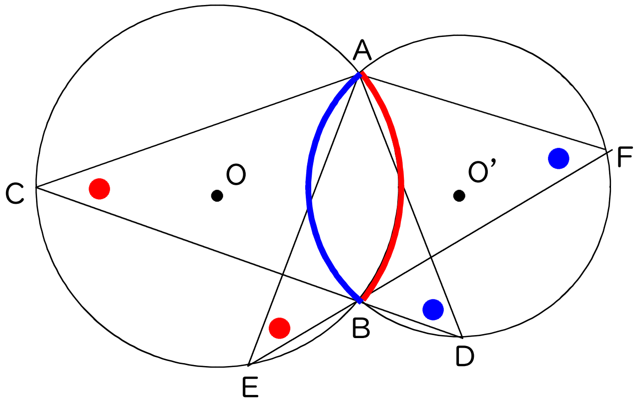


(ｶ) 図のように，円Oの周上の１点Aから2つの弦AP，AQをひき，それぞれの中点をM，Nとする。
このとき，4点A，O，M，Nは同じ円周上にあることを証明しなさい。



解答：練習問題

(ｱ) 2点A,Bで交わる2円O，O’がある。点Bを通る2直線が、図のように、円O，O’とそれぞれ　C，DおよびE，Fで交わっているとき、△ＡＣＤ∽△ＡＥＦである。これを証明しなさい。



△ＡＣＤと△ＡＥＦにおいて

円Oの$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいので

∠ＡＣＢ＝∠ＡＥＢ

よって　∠ＡＣＤ＝∠ＡＥＦ　…　①

円O’ の$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角は等しいので

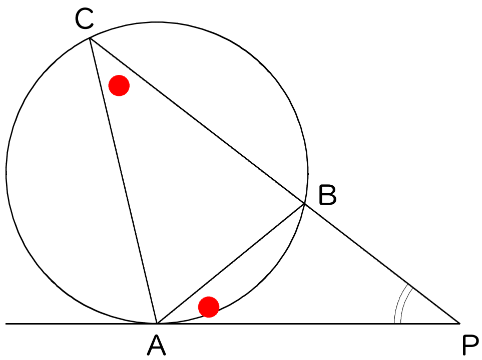
∠ＡＤＢ＝∠ＡＦＢ

よって　∠ＡＤＣ＝∠ＡＦＥ　…　②

①，②より2組の角がそれぞれ等しいので

△ＡＣＤ∽△ＡＥＦ

(ｲ) 円外の点Ｐから、接線ＰＡと円周上の２点Ｂ，Ｃで交わる直線ＰＢをひく。
このとき、△ＰＡＢ∽△ＰＣＡである。これを証明しなさい。



△ＰＡＢと△ＰＣＡにおいて

接弦定理より

∠ＰＡＢ＝∠ＰＣＡ　…　①

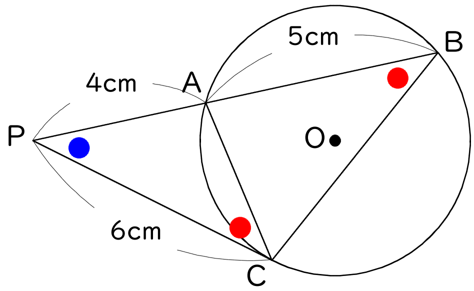
共通な角なので

∠ＡＰＢ＝∠ＣＰＡ　…　②

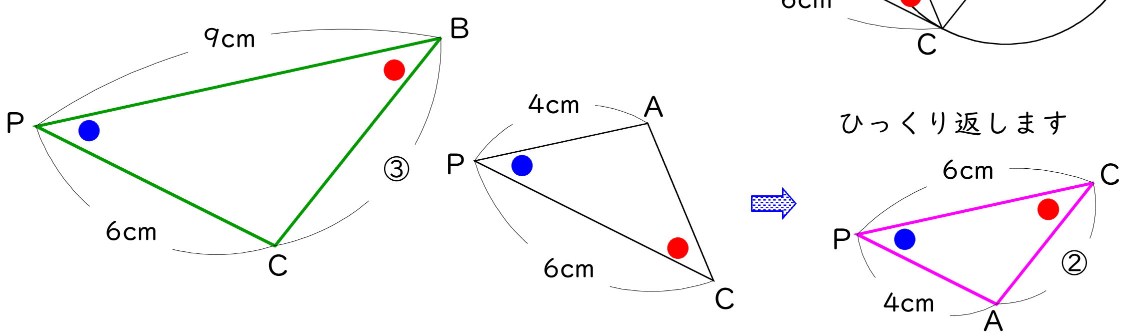
①，②より2組の角がそれぞれ等しいので

△ＰＡＢ∽△ＰＣＡ

(ｳ) △ＡＣＢは円に内接し、ＰＣは円の接線である。
ＰＡ＝4cm，ＡＢ＝5cm，ＰＣ＝6cmのとき、
ＡＣとＣＢの長さの比を、
最も簡単な整数の比で表しなさい。



△ＰＣＡ∽△ＰＢＣを利用します



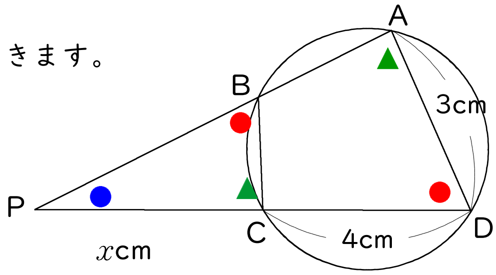
角度のマークを見てからアルファベットを書こう

対応する辺の比を調べると　ＰＣ：ＰＢ＝6：9＝2：3

ＰＡ：ＰＣ＝4：6＝2：3

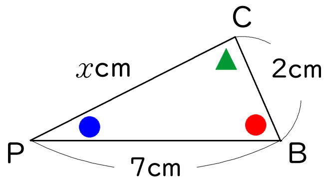
どちらか１組を調べれば答えが分かる　ＡＣ：ＣＢ＝2：3

(エ) 右の図で、四角形ＡＢＣＤは円に内接し、ＰはＡＢの延長とＤＣの延長との交点である。
ＢＣ＝2cm，ＣＤ＝4cm，ＤＡ＝3cm，ＰＢ＝7cmのとき、ＰＣの長さを求めなさい。



△ＰＡＤ∽△ＰＣＢを利用します。ＰＣ＝$x$cmとおきます。

対応する順に書くことができれば
比を書く順番は決まっていません
８通りはできます

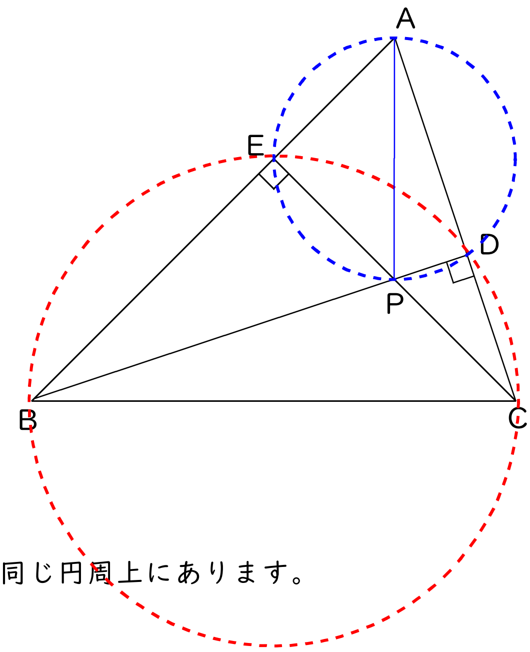


$7:2=(x+4):3$　でも
$(x+4):7=3:2$　それ以外でも

$$2x+8=21$$
$$2x=13$$
$$x=\frac{13}{2}$$

$$PC=\frac{13}{2}\text{cm}$$

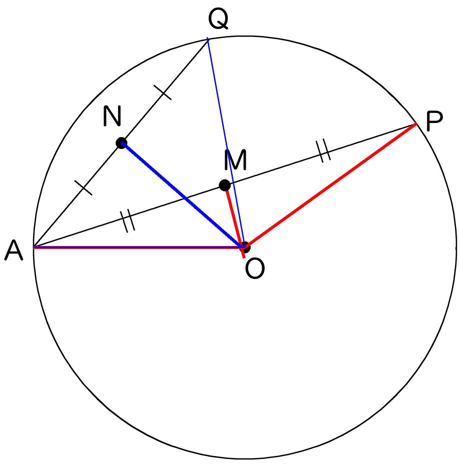
(オ) △ABCで，頂点B，Cから，
それぞれ，AC，ABに垂線BD，CEをひき，
その交点をPとします。
点A，B，C，D，E，Pのうち、
同じ円周上にある4点の組を求めなさい。
組合せは2通りあります。



① ∠BEC＝∠BDC＝90°
円周角の定理の逆により
4点Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅは
ＢＣを直径とする同じ円周上にあります

② ∠AEP＋∠ADP＝180° なので
4点Ａ，Ｅ，Ｐ，Ｄは，ＡＰを直径とする同じ円周上にあります。

(カ) 図のように，円Oの周上の1点Aから2つの弦AP，AQをひき，それぞれの中点をM，Nとする。
このとき，4点A，O，M，Nは同じ円周上にあることを証明しなさい。



<証明Ⅰ>
△AOQと△AOPは二等辺三角形
二等辺三角形の頂点と底辺の中点を結んだので
∠ANO＝∠AMO＝90°
円周角の定理の逆により
4点A,O,M,Nは同じ円周上にある

＜証明Ⅱ＞

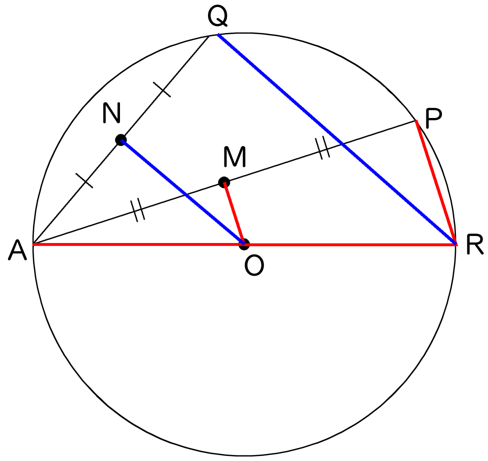
△PAR∽△MAOより　∠AMO＝90°

△QAR∽△NAOより　∠ANO＝90°

∠ANO＝∠AMO＝90°

円周角の定理の逆により

4点A,O,M,Nは同じ円周上にある



＜証明Ⅲ＞

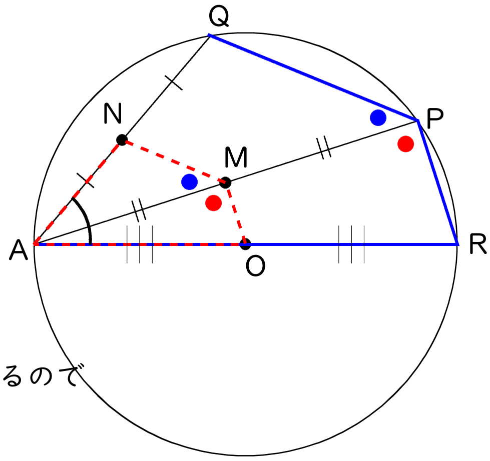
中点連結定理より

OM//RPなので

同位角は等しいので　●＝●

NM//QPなので

同位角は等しいので　●＝●



四角形ARPQは円に内接しているので

∠A＋∠APR●＋∠APQ●＝180°

また、∠A＋∠AMO●＋∠AMN●＝180° となるので

四角形AOMNは円に内接する

したがって、4点A,O,M,Nは同じ円周上にある