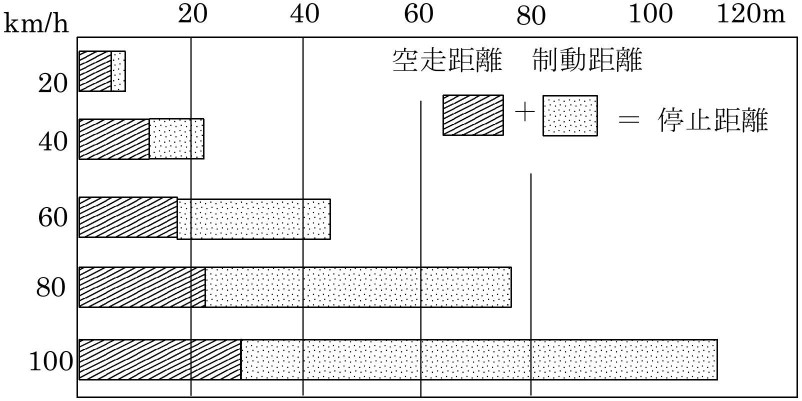
５．関数 $y = ax^2$ の利用

◎ 生活の中にある，二次関数の関係

自動車がブレーキを踏んでから，車が止まるまでの関係です。



空走距離：ドライバーが危険を感じてブレーキを踏み，
ブレーキが効き始めるまでにかかった距離
制動距離：ブレーキが効き始めてから，
車が停止するまでにかかった距離
停止距離：空走距離＋制動距離

問１．自動車のブレーキがききはじめてから停止するまでの距離を制動距離といいます。時速 x km で走っているときの制動距離を y m とすると，y は x の２乗に比例することが知られています。そのときの比例定数は，車の種類や道路の状態などで決まります。

(1) ある自動車では，時速 30　km で走っているときの制動距離が 6 m でした。このとき x，y の関係を式に表しなさい。

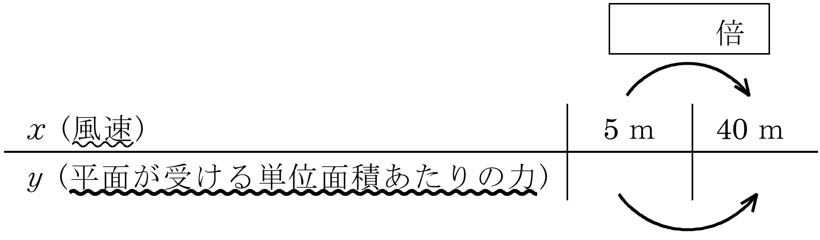
(2) この自動車について，時速 50　km のときの制動距離を求めなさい。また，時速 60 km のときはどうですか。

x（km/時）	30	50	60
y（m）	6		

(3) 時速 60　km のときの制動距離 y（m）は，(1) で分かった式に代入しなくても分かる方法がある。答えなさい。

問２．平面に風が垂直にあたるとき，この平面が受ける単位面積あたりの力は，風速の 2 乗に比例することが知られています。風速が毎秒 40 mのときに平面が受ける単位面積あたりの力は，風速が毎秒 5 mのときの何倍になりますか。

（ﾋﾝﾄ：y は x の 2 乗に比例する）

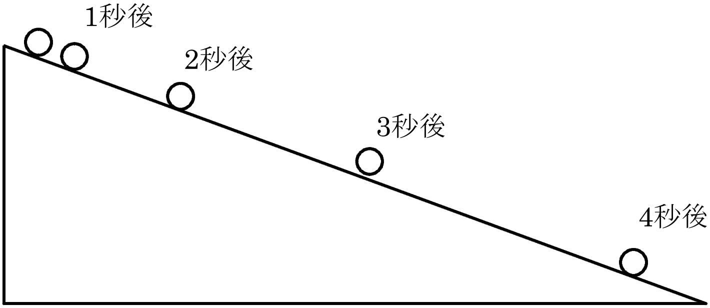


x（風速）	5 m	40 m
y（平面が受ける単位面積あたりの力）		

答え　------>　　　倍

問３．ボールが斜面をころがりはじめてからの時間を x 秒，その間にころがる距離を y m とすると，x と y の間には，$y = 2x^2$ という関係があります。

この運動について，2 秒後から 4 秒後までの平均の速さと，1 秒後から 3 秒後までの平均の速さを求めなさい。



x 秒	2	4
y m		

x 秒	1	3
y m		

2 秒後から 4 秒後まで，2 秒間で（　　　　　）m ころがる

したがって，2 秒間の平均の速さは（　　　　　）m ／秒

1 秒後から 3 秒後まで，2 秒間で（　　　　　）m ころがる

したがって，2 秒間の平均の速さは（　　　　　）m ／秒

平均の速さは，$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$ となり，(変化の割合)に等しい。

問４．ガリレオ・ガリレイは，**振り子の長さを同じにしたとき**，おもりの重さや振れ幅が変わっても，ふりこが 1 往復するのにかかる時間は変わらないことを発見しました。

ふりこが 1 往復するのにかかる時間を周期といいます。周期が x 秒の振り子の長さを ym とすると，

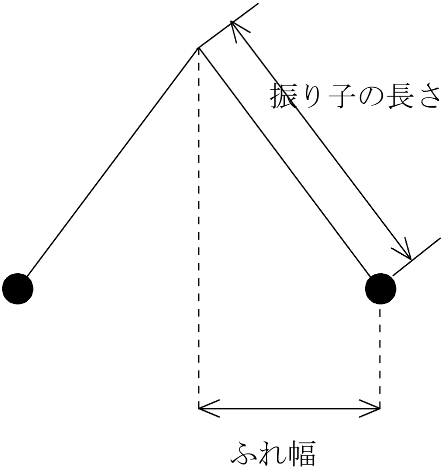
およそ $y = \frac{1}{4}x^2$ という関係があります。

このとき、次の各問いに答えなさい。

(ｱ) 周期が 1 秒である振り子をつくるには、振り子の長さを何 m にすればよいですか。

(ｲ) 振り子の長さが $1m$ のふりこの周期は、何秒になりますか。

(ｳ) 振り子の長さが $4m$ のふりこの周期は、何秒になりますか。



＜答え＞問１.

(1) 時速 x km で走っているときの制動距離を y m とすると，

y は x の 2 乗に比例するので，$y = ax^2$ に $x = 30$，$y = 6$ を代入して，$6 = a \times 900$　　$a = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$

x，y の関係は，$y = \frac{1}{150}x^2$

(2)

$y = \frac{1}{150}x^2$ に $x = 50$ を代入して，$y = \frac{50 \times 50}{150} = \frac{50}{3}$

$y = \frac{1}{150}x^2$ に $x = 60$ を代入して，$y = \frac{60 \times 60}{150} = 24$

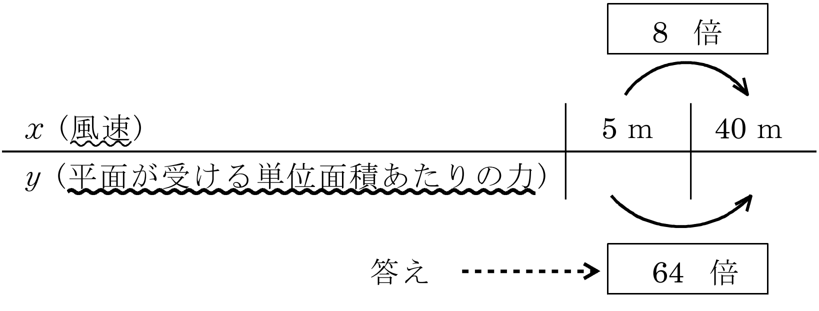
(3) $x = 60$ は，$x = 30$ の 2 倍，

y は x の 2 乗に比例するので，y は $2^2 = 4$ 倍になる

$y = 6 \times 4 = 24$

問２. この平面が受ける単位面積あたりの力は，風速の 2 乗に比例する。（ﾋﾝﾄ：y は x の 2 乗に比例する）

風速が毎秒 40 m は，風速が毎秒 5 m の 8 倍なので，



問３． x と y の間には，$y = 2x^2$ という関係があります。

x 秒	2	4
y m	8	32

x 秒	1	3
y m	2	18

2 秒後から 4 秒後まで，2 秒間で（　24　）m ころがる

したがって，2 秒間の平均の速さは（　12　）m ／秒

1 秒後から 3 秒後まで，2 秒間で（　16　）m ころがる

したがって，2 秒間の平均の速さは（　8　）m ／秒

この場合の変化の割合は，平均の速さになっている

問４． **振り子の長さを同じにしたとき**，おもりの重さや振れ幅が変わっても，ふりこが 1 往復するのにかかる時間は変わらない。ふりこが 1 往復するのにかかる時間を周期という。周期が x 秒の振り子の長さを ym とすると，

およそ $y = \frac{1}{4}x^2$ という関係があります。

(ｱ) $y = \frac{1}{4}x^2$　$x = 1$ を代入して，$y = \frac{1}{4}$　振り子の長さは $\frac{1}{4}m$

(ｲ) $y = 1$ を代入して，$1 = \frac{1}{4}x^2$　$x^2 = 4$　$x = \pm 2$

$x > 0$ より　$x = 2$　周期は 2 秒

(ｳ) $y = 4$ を代入して，$4 = \frac{1}{4}x^2$　$x^2 = 16$　$x = \pm 4$

$x > 0$ より　$x = 4$　周期は 4 秒

y が(ｲ)4倍になっているので，x は2倍で4秒ともできる

６．いろいろな関数

◎ 生活の中にある，二次関数とは異なる関数の関係

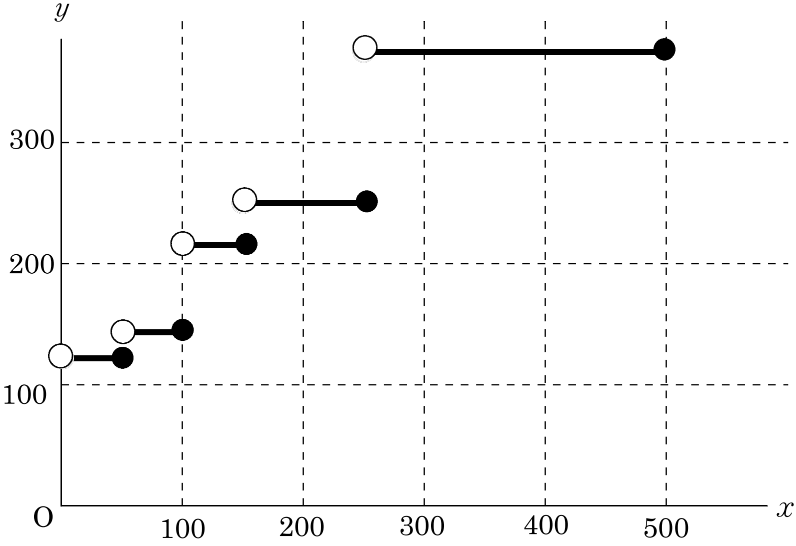
例１． 次の表は、郵便局で定形外郵便物の重さと料金の関係を示したものである。

重さ (g)	50g 以内	100g 以内	150g 以内	250g 以内	500g 以内
料金 (円)	120	140	210	250	390

(ｱ) 重さが 160g のときの料金はいくらになりますか。

(ｲ) 350 円以下で送ることができる定形外郵便物は，何 g までですか。

郵便物の重さを x g，そのときの料金 y 円としてグラフで表すと



この関係の x と y との関係を式に表すと，

$y = 120$ （ $0 < x \leqq 50$） $y = 140$ （$50 < x \leqq 100$）

$y = 210$ （$100 < x \leqq 150$） $y = 250$ （$150 < x \leqq 250$）

$y = 390$ （$250 < x \leqq 500$）

この場合，x の値を決めると，
それに対応して y の値が（必ず１つだけ）決まるので、
y は x の関数であるといえる。
言い換えると，重さを決めると，それに対応して料金が必ず
１つだけ決まるので，(料金)は(重さ)の関数であるといえる。

例１．＜答え＞

(ｱ) 重さが 160g のときの料金は 250 円。

(ｲ) 350 円以下で送ることができる定形外郵便物は，250g まで

復習問題

問１． 次の各立体の体積を $y\ cm^3$，また面積や表面積を $y\ cm^2$とするとき，y を x の式で表し，また y が x の 2 乗に比例するものを選びなさい。

(ｱ) 1 辺が $x\ cm$ の正方形の面積

(ｲ) 1 辺が $x\ cm$ の立方体の体積

(ｳ) 1 辺が $x\ cm$ の立方体の表面積

(ｴ) 半径が $x\ cm$ の円の面積

(ｵ) 底面が半径が $x\ cm$ の円で，高さ $5cm$ の円柱の体積

(ｶ) 底面が半径が $x\ cm$ の円で，高さが $6cm$ の円錐の体積

(ｷ) 縦 $5cm$，横 $x\ cm$，高さ $7cm$ の直方体の体積

(ｸ) 半径が $x\ cm$ の球の体積

(ｹ) 半径が $x\ cm$ の球の表面積

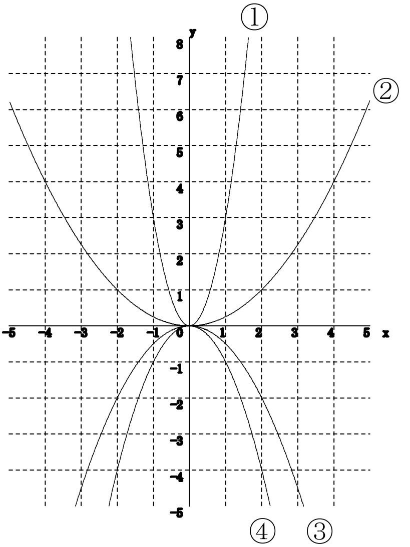
問２． 右の図の①～④は，$y = ax^2$ のグラフです。
４つの関数の式を求めなさい。

①

②

③

④



問３． 次の関数について，x の変域が，$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域を求めなさい。

（1）　$y = x^2$

x	-2	0	1
y			

（2）　$y = -2x^2$

x	-2	0	1
y			

（3）　$y = 5x^2$

x	-2	0	1
y			

問４． 関数 $y = 2x^2$ について，x の値が次のように増加するときの**変化の割合**と **y の増加量**を求めなさい。

（1）　2 から 5 まで

x	2	5
y		

（2）　-4 から -2 まで

x	-4	-2
y		

（3）　1 から 3 まで

x	1	3
y		

問５．y が x の 2 乗に比例していて，$x=-2$ のとき，$y=-12$ です。このとき，x ，y の関係を式に表しなさい。

また，$x=4$ のときの y の値を求めなさい。

問６．次の各問いに答えなさい。

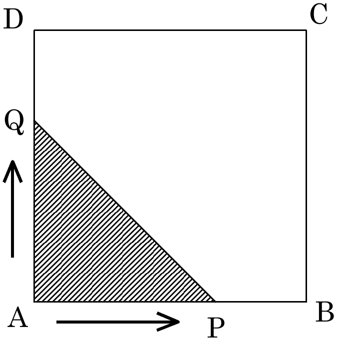
(ｱ) y が x の 2 乗に比例し，x の値が 2 から 4 まで増加するときの変化の割合が 3 であるような関数の式を求めなさい。

(ｲ) $y=-x^2$ について，x の変域が $a \leqq x \leqq 3$ であるとき，y の変域は $-25 \leqq y \leqq b$ である。a，b の値を求めなさい。

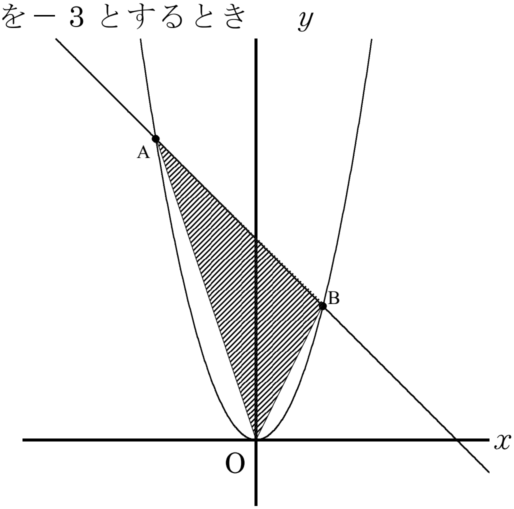
(ｳ) 関数 $y=ax^2$ について，x の値が -1 から 4 まで変化するときの変化の割合が，$y=-3x+2$ の変化の割合と等しいとき，a の値を求めなさい。

(ｴ) 関数 $y=-x^2$ について，x の値が a から $a+1$ まで増加するときの変化の割合は 5 である。このとき，a の値を求めなさい。

問７．１辺が $4cm$ の正方形ABCDがあります。点PはAB上を毎秒 $1cm$ の速さで，AからBまで動き、点QもAD上を毎秒 $1cm$ の速さで，AからDまで動きます。２点P，Qが同時にAを出発してから x 秒後の△APQの面積を ycm^2 として，x，y の関係を変域をつけて式に表しなさい。



問８．$y = ax^2$ のグラフと $y = - x + 6$ のグラフの交点をA，Bとする。点Aの x 座標を－３とするとき



（1）点Aの y 座標を求めなさい。

（2）a の値を求めなさい。

（3）点Bの座標を求めなさい。

（4）△OABの面積を求めなさい。

（5）原点を通り，△OABの面積を２等分する直線の式を求めなさい。

復習問題＜答え＞

問１．y が x の 2 乗に比例するものは，

(ｱ)，(ｳ)，(ｴ)，(ｵ)，(ｶ)，(ｹ)

(ｱ) 1 辺が x cm の正方形の面積　$y = x^2$

(ｲ) 1 辺が x cm の立方体の体積　$y = x^3$

(ｳ) 1 辺が x cm の立方体の表面積　$y = 6x^2$

(ｴ) 半径が x cm の円の面積　$y = \pi x^2$

(ｵ) 底面が半径が x cm の円で，高さ 5cm の円柱の体積

$y = 5\pi x^2$

(ｶ) 底面が半径が x cm の円で，高さが 6cm の円錐の体積

$y = 2\pi x^2$

(ｷ) 縦 5cm，横 x cm，高さ 7cm の直方体の体積　$y = 35x$

(ｸ) 半径が x cm の球の体積　$y = \frac{4}{3}\pi x^3$

(ｹ) 半径が x cm の球の表面積　$y = 4\pi x^2$

問２．

①　$y = 3x^2$　　②　$y = \frac{1}{4}x^2$

③　$y = -\frac{1}{2}x^2$　　④　$y = -x^2$

問３．x の変域が，$-2 \leqq x \leqq 1$ のときの y の変域

（1）　$y = x^2$

x	-2	0	1
y	4	0	

$0 \leqq y \leqq 4$

（2）　$y = -2x^2$

x	-2	0	1
y	-8	0	

$-8 \leqq y \leqq 0$

（3）　$y = 5x^2$

x	-2	0	1
y	20	0	

$0 \leqq y \leqq 20$

問４． 関数 $y = 2x^2$ について，**変化の割合と y の増加量**

(1)　2 から 5 まで

x	2	5
y	8	50

変化の割合　14
y の増加量　42

(2)　-4 から -2 まで

x	-4	-2
y	32	8

変化の割合　-12
y の増加量　-24

(3)　1 から 3 まで

x	1	3
y	2	18

変化の割合　8
y の増加量　16

問５． $y = ax^2$ に $x = -2$，$y = -12$ を代入して
$-12 = 4a$　　$a = -3$　　　　$y = -3x^2$
$y = -3x^2$ に $x = 4$ を代入して　$y = -48$

問６．

(ｱ) $y = ax^2$ において，x の値が 2 から 4 まで増加するときの
変化の割合は $6a$ とおけるので $6a = 3$　$a = \frac{1}{2}$　$y = \frac{1}{2}x^2$

(ｲ) $y = -x^2$ について，$x = 3$ のとき，$y = -9$ となるので
$a = -5$ でないと y の最小値が -25 とならない。
最大値はグラフが y 軸をまたいでいるので $b = 0$ となる。

(ｳ) x の値が -1 から 4 まで変化するときの変化の割合は，
$y = ax^2$ においては，$(-1 + 4) \times a = 3a$
$y = -3x + 2$ においては，-3
等しいので　$3a = -3$ を解いて　　$a = -1$

(ｴ) 関数 $y=-x^2$ について，

x の値が a から $a+1$ まで増加するときの変化の割合は 5

変化の割合を公式で求めると，

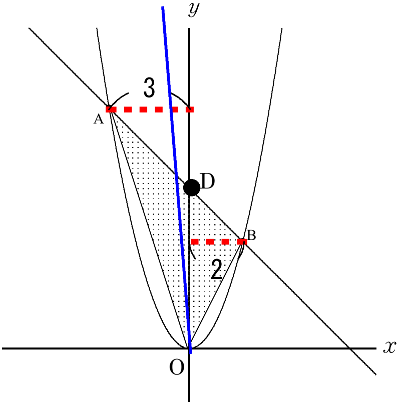
$(a+a+1)\times(-1)=-2a-1$　　となるので

$-2a-1=5$　　$-2a=6$　　$a=-3$

問７． x 秒後の AP と AQ の長さは xcm なので

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ とおける。変域は $0\leqq x\leqq 4$

問８． $y=ax^2$，$y=-x+6$。点 A の x 座標を -3 とすると



(1) 点 A の y 座標は $x=-3$ を

$y=-x+6$ に代入して

$y=-(-3)+6=9$

(2) a の値は，$y=ax^2$ に

点 A$(-3,\ 9)$ を代入して

$9=9a$　　$a=1$

(3) 交点の座標は置換法で解く

$x^2=-x+6$ を解いて

$x^2+x-6=0$　　$(x+3)(x-2)=0$　　$x=-3,\ 2$

点 B の x 座標は 2 の方なので，B (2，4)

(4) △ OAB の面積は，底辺が $\mathrm{OD}=6$，高さが $3+2=5$

となるので，$6\times5\times\dfrac{1}{2}=15$

(5) AB の中点 $\left(\dfrac{-3+2}{2},\ \dfrac{9+4}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{13}{2}\right)$ を通れば，

△ OAB の面積を 2 等分できる。傾きは 1 ｺｲｯﾃ 13 ｻｶﾞﾙので

-13，直線の式は，$y=-13x$

＜高校数学の予習＞

問．放物線 $y = ax^2$ と直線 $y = mx + n$ が 2 点 A，B で交わっています。A の x 座標が $\boldsymbol{\alpha}$，B の x 座標が $\boldsymbol{\beta}$ とするとき，直線の式を求めなさい。

何と，A と B の y 座標を求めずに直線の式を
求めることができる！

考え方

放物線と直線が，交点 A と B で交わっているということは，交点 A と B の座標が全く同じなので，

x の値が $\boldsymbol{\alpha}$ から $\boldsymbol{\beta}$ に増加したときの放物線の変化の割合と直線の変化の割合は同じことになる。

直線の式の傾きは，放物線の変化の割合を求める公式で
$\boldsymbol{a(\alpha + \beta)}$ となるので，
直線の式は，$\boldsymbol{y = a(\alpha + \beta)x + n}$　となる。

交点 A の座標は，$(\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{a\alpha^2})$ とおけるので，
これを直線の式に代入すると，

$$\boldsymbol{a\alpha^2 = a(\alpha + \beta) \times \alpha + n}$$

$$\boldsymbol{a\alpha^2 = a\alpha^2 + a\alpha\beta + n}$$

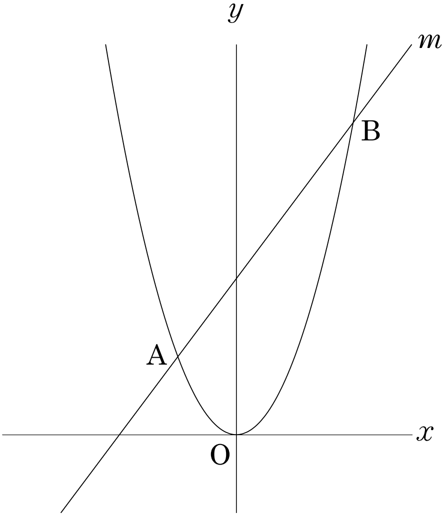
$$\boldsymbol{n = -a\alpha\beta}$$

直線の式は，$y = \underbrace{\boldsymbol{a(\alpha + \beta)}}_{\text{傾き}}x \underbrace{\boldsymbol{- a\alpha\beta}}_{\text{切片}}$

問．放物線 $y = 2x^2$ と直線 m が右の図のように交わっています。それぞれの交点を A，B とすると，x の座標は－１と２です。このとき，高校数学を利用して答えなさい。

(ｱ) 直線 m の式を求めなさい。

(ｲ) △ OAB の面積を求めなさい。



＜答え＞

(ｱ) $y = a(\alpha + \beta)x - a\alpha\beta$ に

$a = 2$，$\alpha = -1$，$\beta = 2$ を代入して

直線 m の式は　$y = 2x + 4$

(ｲ) 底辺は，直線 m の切片より 4

高さは，$1 + 2 = 3$

△ OAB の面積は，$4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$