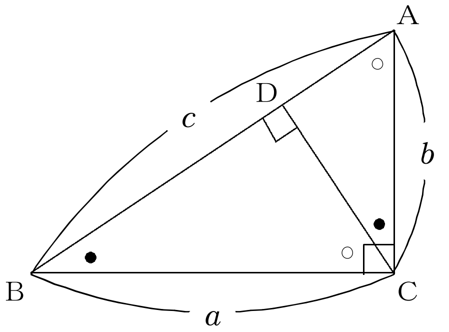
三平方の定理の証明＜４＞　（アインシュタインが小学生の時に見つけたといわれる証明）



ＡＢ＝c，ＢＣ＝a，ＣＡ＝bとすると
△ＡＢＣ∽△ＣＢＤ∽△ＡＣＤとなり
斜辺の長さを利用して
相似比は　c ： a ： b
面積比＝(相似比)^2　なので
面積比は　c^2 ： a^2 ： b^2
△ＡＢＣの面積＝△ＣＢＤの面積＋△ＡＣＤの面積

したがって　$c^2 = a^2 + b^2$

＜別解＞

△ ABC ∽△ CBD より

$c : a = a : y$

$a^2 = cy$　①

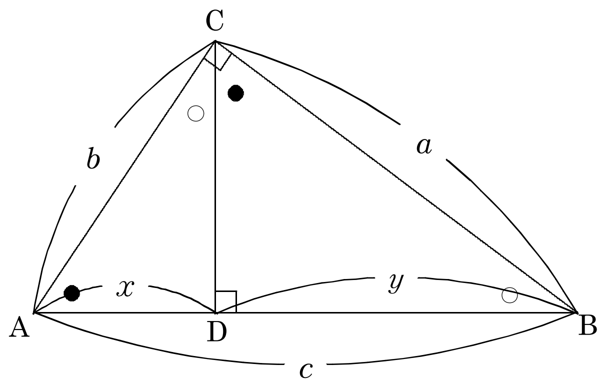
△ ABC ∽△ ACD より

$c : b = b : x$

$b^2 = cx$　②

①＋②と $x + y = c$ より

$a^2 + b^2 = c(x + y) = c^2$



＜別解＞

相似比より　$c : a = a : y$　①

$c : b = b : x$　②

また、　$x + y = c$　③

①，②を③に代入すると、

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c$$

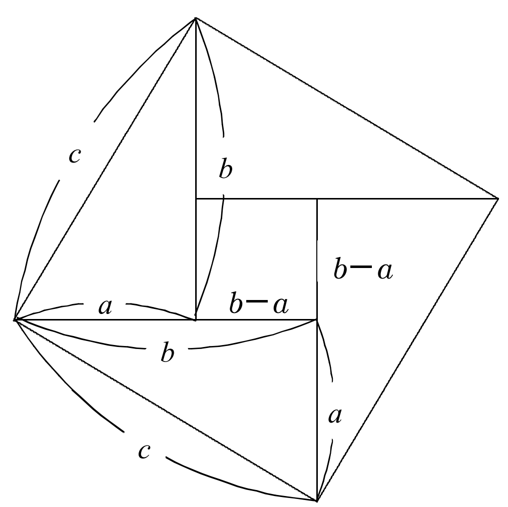
したがって　$a^2 + b^2 = c^2$

三平方の定理の証明＜５＞

(ｱ) c を１辺とする正方形の面積は　c^2

(ｲ) １辺が $(b - a)$ の正方形の面積と
４つの直角三角形の面積の合計は

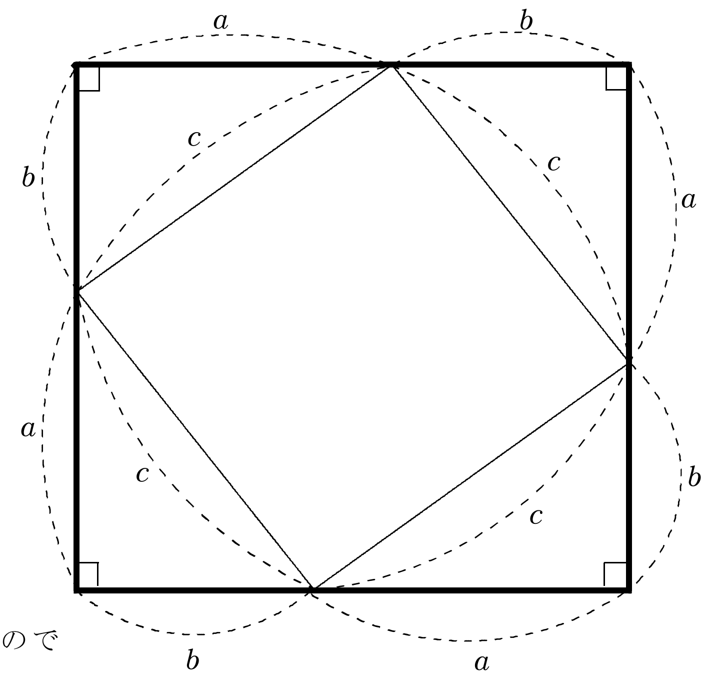
$$(b - a)^2 + a \times b \times \frac{1}{2} \times 4$$



(ｳ) (ｱ) と (ｲ) は同じ面積を表しているので

$b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = c^2$　　したがって，$a^2 + b^2 = c^2$

三平方の定理の証明＜６＞



太線の正方形の面積を

(ｱ)外側の１辺×１辺と考えると

$$(a+b)^2$$

(ｲ)cを１辺とする正方形の面積と
４つの直角三角形の面積の
合計と考えると

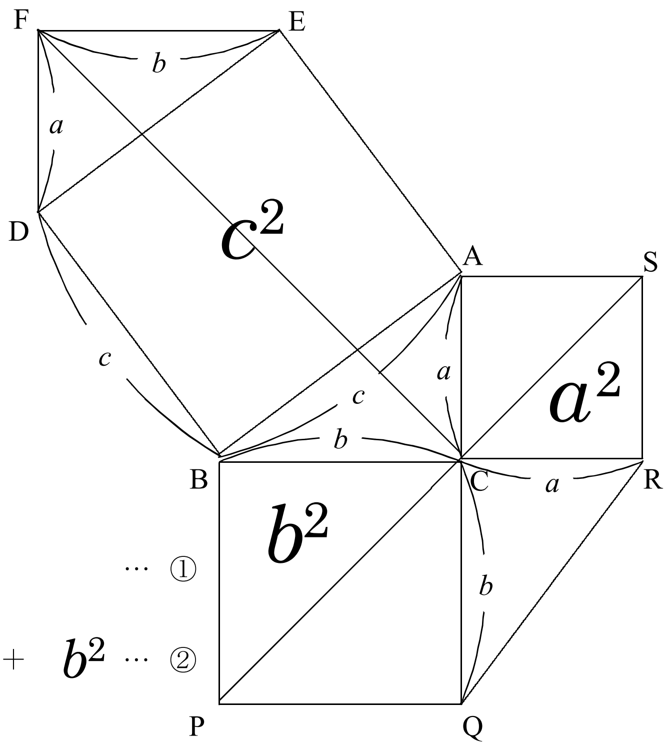
$$c^2 + a \times b \times \frac{1}{2} \times 4$$

(ｳ) (ｱ)と(ｲ)は同じ面積を表しているので

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

したがって，$a^2 + b^2 = c^2$

三平方の定理の証明＜７＞　（この証明方法は、レオナルド・ダ・ビンチによるものと言われている。）



四角形 EFCA，FDBC，ABPS，PQRS
は合同で面積は全て等しいので、

四角形 EFCA ＋四角形 FDBC
＝四角形 ABPS ＋四角形 PQRS

また、△ DEF，△ ABC，△ QRC
は合同で面積は全て等しい。

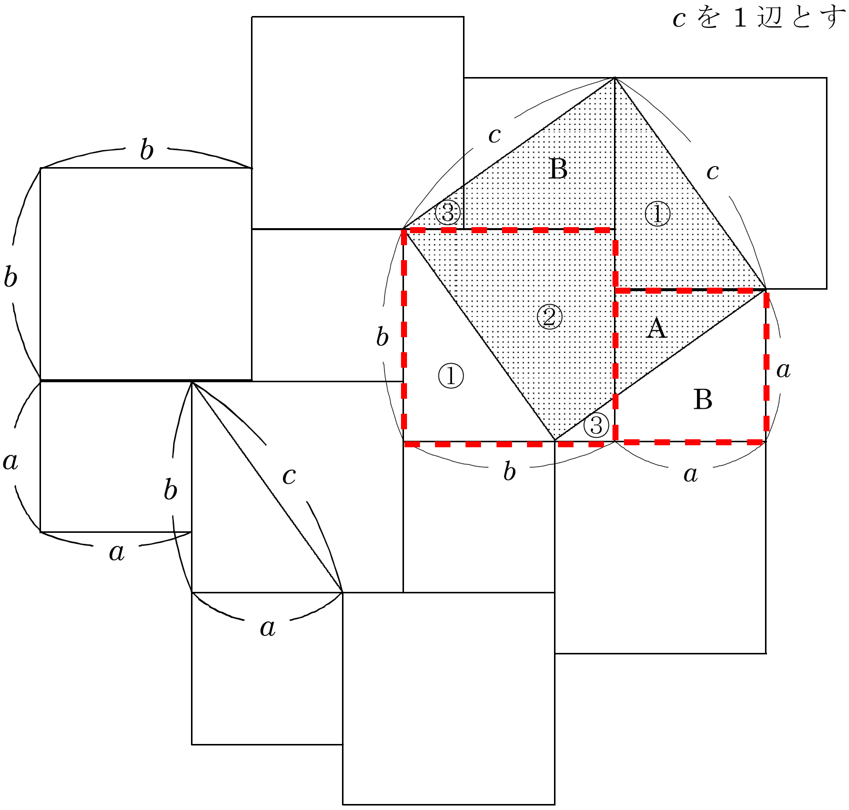
ここで、
四角形 EFCA ＋四角形 FDBC
＝△ DEF ＋△ ABC ＋ c^2 … ①
四角形 ABPS ＋四角形 PQRS
＝△ ABC ＋△ QRC ＋ $a^2 + b^2$ … ②

①，②より　$a^2 + b^2 = c^2$

三平方の定理の証明＜８＞　（秋山　仁先生　ＮＨＫ高校講座「数学基礎」）

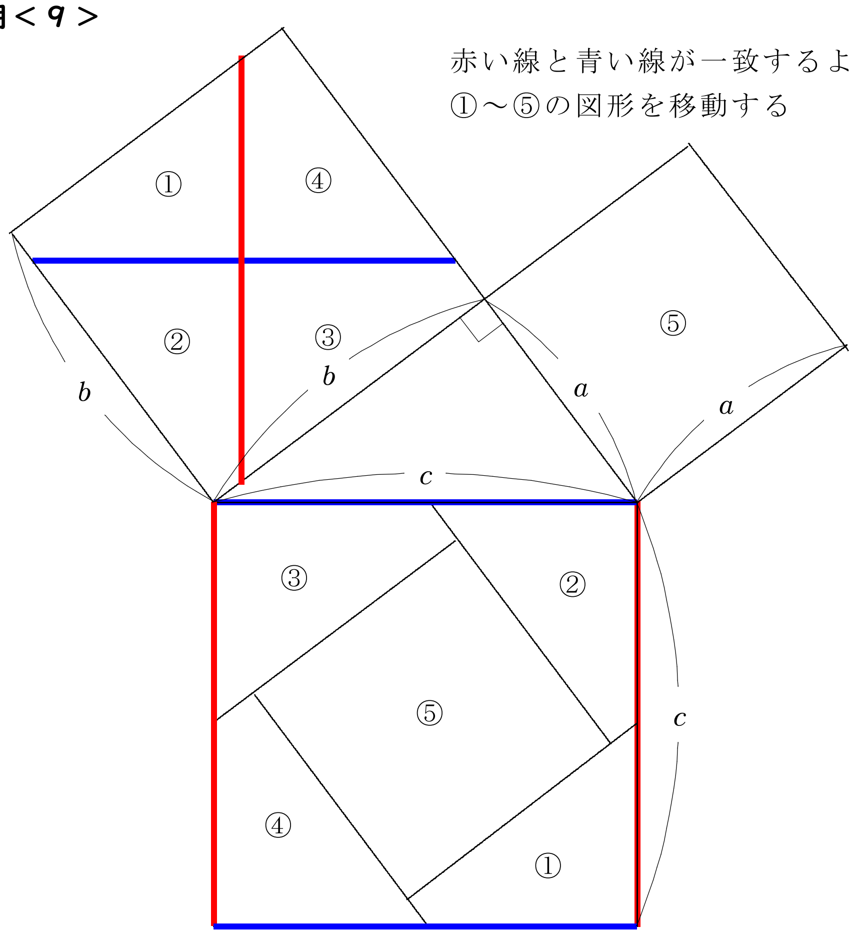
c を１辺とする正方形の面積から
①，③，Ｂを
赤枠の中に移動する

$c^2 = a^2 + b^2$

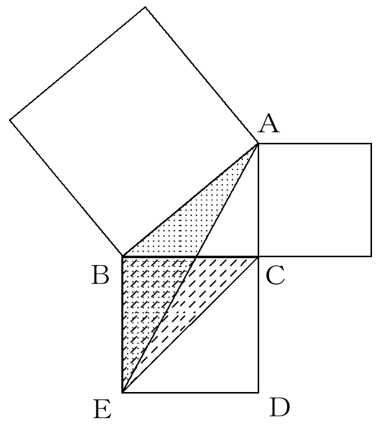


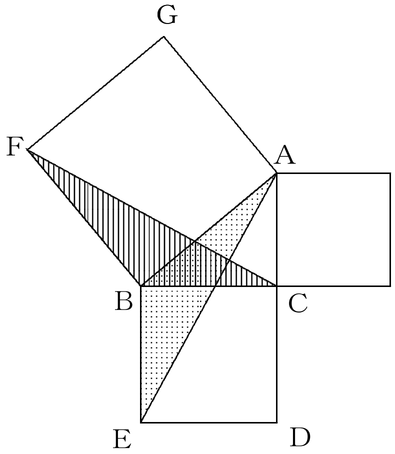
三平方の定理の証明＜９＞

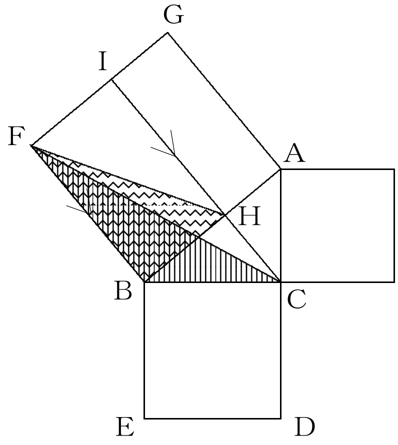
赤い線と青い線が一致するように
①～⑤の図形を移動する



三平方の定理の証明＜１０＞



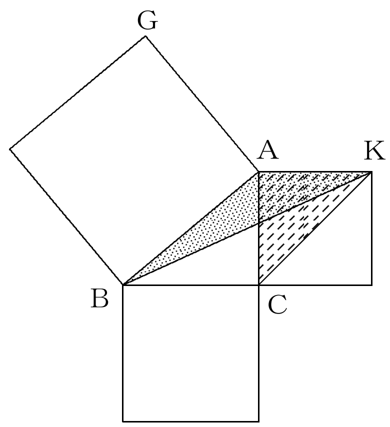


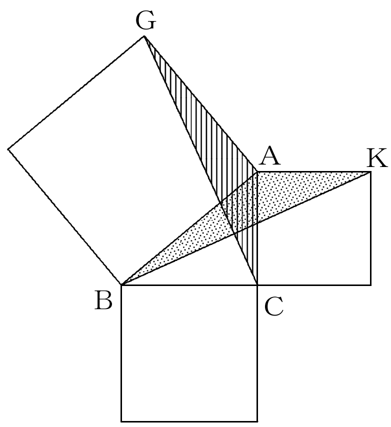


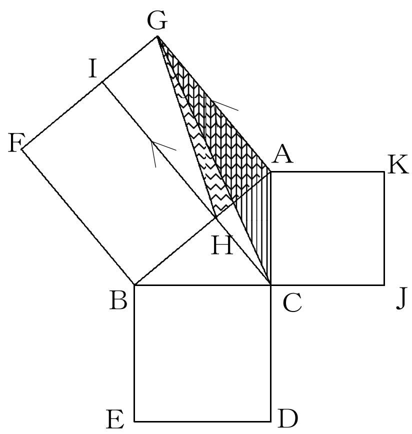
ＡＣ∥ＢＥより　　△ＢＡＥ≡△ＢＦＣより　　ＣＨ∥ＢＦより

△ＢＣＥ＝△ＢＡＥ　①　　△ＢＡＥ＝△ＢＦＣ　②　　△ＢＦＣ＝△ＢＦＨ　③

①②③より　△ＢＣＥ＝△ＢＦＨ　　∴　四角形ＢＥＤＣ＝四角形ＦＢＨＩ







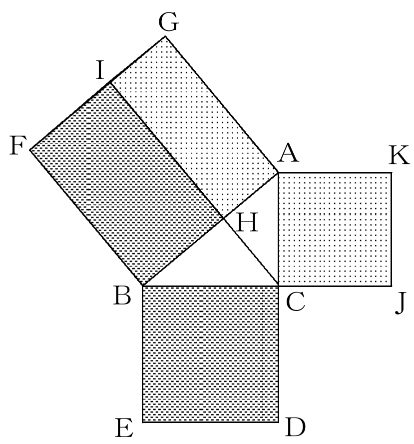
ＡＫ∥ＢＣより　　△ＡＢＫ≡△ＡＧＣより　　ＣＨ∥ＡＧより

△ＡＣＫ＝△ＡＢＫ　④　　△ＡＢＫ＝△ＡＧＣ　⑤　　△ＡＧＣ＝△ＡＧＨ　⑥

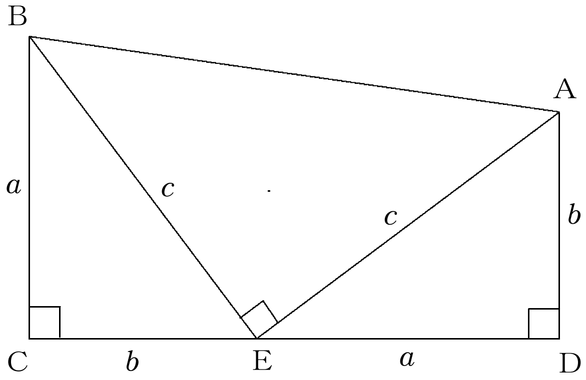
④⑤⑥より　△ＡＣＫ＝△ＡＧＨ　　∴　四角形ＡＣＪＫ＝四角形ＡＧＩＨ

	四角形ＢＥＤＣ	＝四角形ＦＢＨＩ
＋）	四角形ＡＣＪＫ	＝四角形ＡＧＩＨ
	四角形ＢＥＤＣ＋四角形ＡＣＪＫ	＝四角形ＦＢＡＧ

∴　ＢＣ^2＋ＣＡ^2＝ＡＢ^2



三平方の定理の証明＜１１＞　（ガルフィールド（米第20代大統領）によるものと言われている）



台形ＡＢＣＤの面積を２通りで表すと

(ｱ) １つの台形と考えて

$$(a+b)\times(a+b)\times\frac{1}{2}$$

(ｲ) ３つの三角形と考えて

$$a\times b\times\frac{1}{2}\times 2+c\times c\times\frac{1}{2}$$

(ｳ) (ｱ) と (ｲ) は等しいので

$$(a+b)\times(a+b)=a\times b\times 2+c\times c$$

したがって，$a^2+b^2=c^2$

三平方の定理の証明＜１２＞　（方べきの定理の利用１）

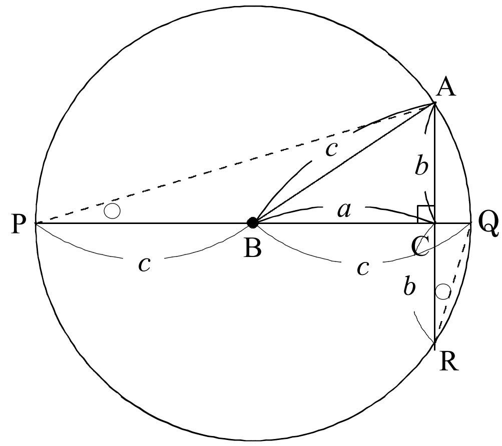
Bを中心とする半径BAの円とBCの延長との交点をそれぞれP，Qとし、
また、ACの延長と円との交点をRとする。
方べきの定理より

$$AC\times RC=PC\times QC$$

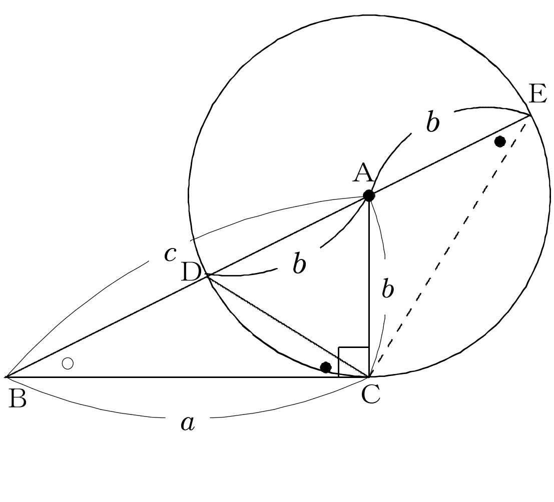
したがって、

$$b^2=(c+a)(c-a)$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$$



三平方の定理の証明＜１３＞　（方べきの定理の利用２）



ＢＣ＝a、ＣＡ＝b、ＡＢ＝c、∠Ｃ＝90°

点Ａを中心の辺ＢＣに接する円を描く。
その円とＡＢの交点をＤ、
ＡＢの延長とその円の交点をＥとすると、
△ＢＣＤ∽△ＢＥＣより

$$BC:DB=EB:BC$$

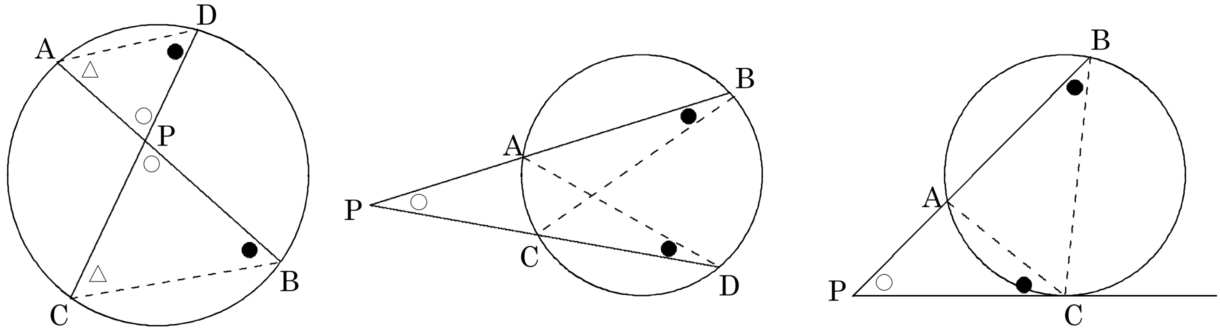
$$a:(c-b)=(c+b):a$$

$$a\times a=(c-b)(c+b)$$（方べきの定理）

$$a^2=c^2-b^2$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$$

＜方べきの定理＞



△ PAD ∽△ PCB なので
PA：PC ＝ PD：PB
PA・PB ＝ PC・PD

△ PAD ∽△ PCB なので
PA：PC ＝ PD：PB
PA・PB ＝ PC・PD

△ PAC ∽△ PCB なので
PA：PC ＝ PC：PB
PA・PB ＝ PC^2

三平方の定理の証明＜１４＞

三角形の面積は、$\frac{1}{2}ab$ … ①

3つの三角形の和と考えると　$\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$ … ②

①，②は等しいので　$(a+b+c)r=ab$ … ③

さらに、 接線の長さは等しいので、

$$c=(a-r)+(b-r)=a+b-2r$$

等式を r について解くと

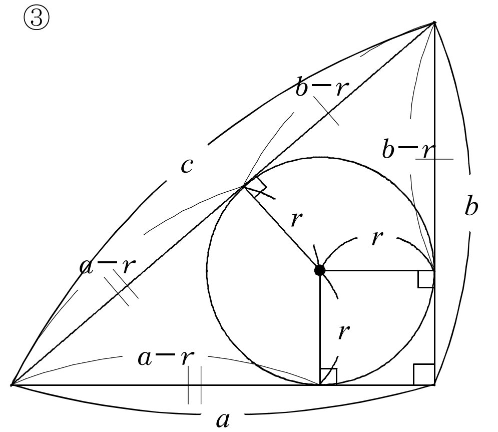
$$r=\frac{a+b-c}{2}$$

これを、③に代入して、

$$(a+b+c)(a+b-c)=2ab$$

$$(a+b)^2-c^2=2ab$$

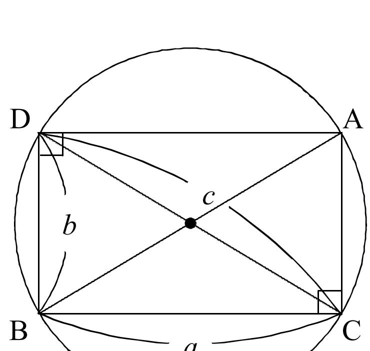
したがって、$a^2+b^2=c^2$　が成り立つ。



三平方の定理の証明＜１５＞　（トレミーの定理の利用）

斜辺 AB の中点に関して点 C と対象な点を D とすると、
四角形 DBCA は長方形となるので円に内接している。
トレミーの定理より
DA・BC ＋ DB・AC ＝ AB・DC
したがって

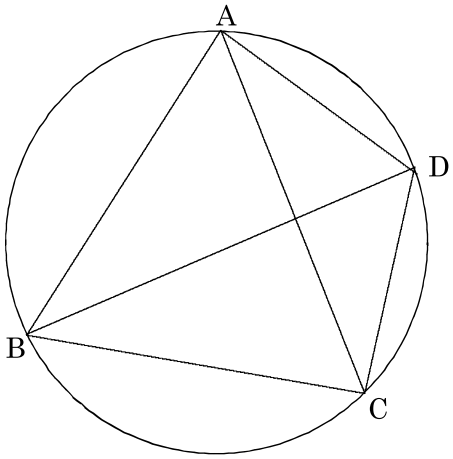
$$a^2 + b^2 = c^2$$

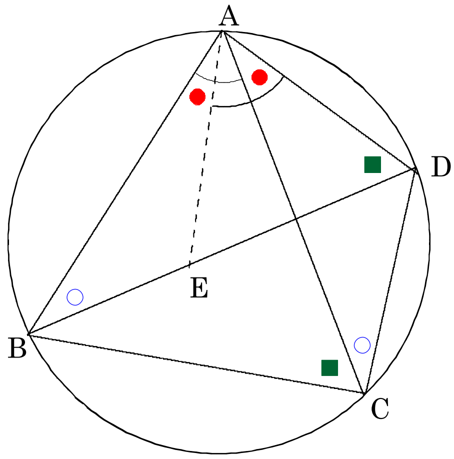


（トレミーの定理：円に内接する四角形の2組の対辺の積の和は、対角線の積に等しい）

＜トレミーの定理＞

四角形が円に内接するとき　、　AB・CD ＋ BC・AD ＝ AC・BD





BD 上に、∠ BAE ＝∠ CAD となるように点 E をとると

△ ABE ∽△ ACD　なので

AB：AC ＝ BE：CD　より　AB・CD ＝ AC・BE　… ①

△ AED ∽△ ABC　なので

AD：AC ＝ ED：BC　より　BC・AD ＝ AC・ED　… ②

①＋②から　AB・CD ＋ BC・AD ＝ AC・BE ＋ AC・ED

＝ AC・(BE ＋ ED)

＝ AC・BD