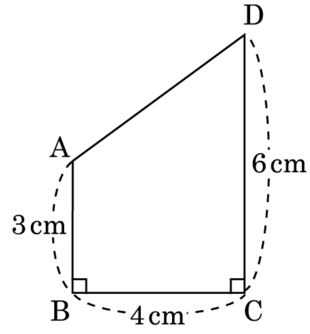
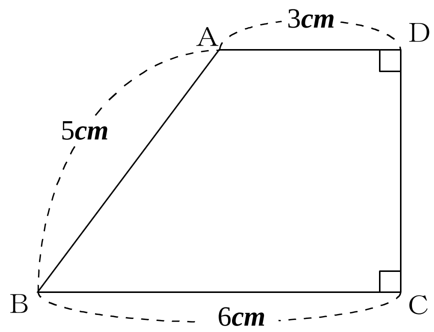
回転体の問題１

問１．図のような，AB ＝ 3cm，BC ＝ 4cm，CD ＝ 6cm，∠ B ＝∠ C ＝ 90°の台形 ABCD がある。この台形を辺 AB を軸として１回転させてできる立体の体積を求めなさい。(2003岡山)



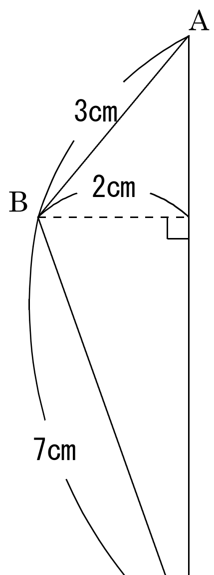
問２．右の図のように、ＡＢ＝ 5*cm*，ＢＣ＝ 6*cm*，ＡＤ＝ 3*cm*，∠Ｃ＝∠Ｄ＝ 90 °の台形がある。これを、辺ＣＤを軸として、1回転してできる立体の体積と側面積を求めなさい。



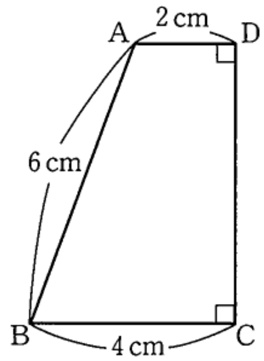
問３．図は，AB ＝ 3 cm，BC ＝ 7 cm の三角形 ABC である。頂点 B から辺 AC に引いた垂線の長さが 2 cm のとき，次の問いに答えなさい。(H16)

(ｱ) 辺 AC の長さを求めなさい。

(ｲ) この三角形 ABC を，辺 AC を軸として 1 回転させたときにできる立体の表面積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



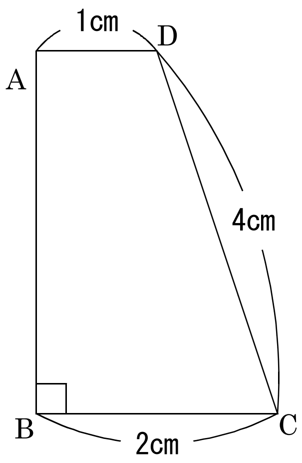
問４．図のように，∠ BCD ＝∠ ADC ＝ 90°，AB ＝ 6 cm，AD ＝ 2 cm，BC ＝ 4 cm の台形 ABCD がある。この台形を辺 DC を軸として一回転させてできる立体の表面積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。(2005秋田)



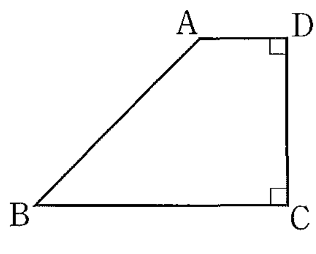
問５．図は，辺 AD と辺 BC が平行で，∠ ABC が直角の台形であり，AD ＝ 1cm，BC ＝ 2cm，CD ＝ 4cm である。この台形を，辺 AB を軸として１回転させてできる立体について，次の問いに答えなさい。ただし，円周率はπとする。(H12)

(ｱ) この立体の体積を求めなさい。

(ｲ) この立体の側面積を求めなさい。



問６．台形 ABCD があり，AD ＝ 1 cm，CD ＝ 2 cm，∠ BCD ＝∠ ADC ＝ 90°，∠ BAD ＝ 135°である。この台形 ABCD を辺 CD を軸として１回転してできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率をπとする。(2012秋田)



問１.

円柱の体積　$4 \times 4 \times \pi \times 6$

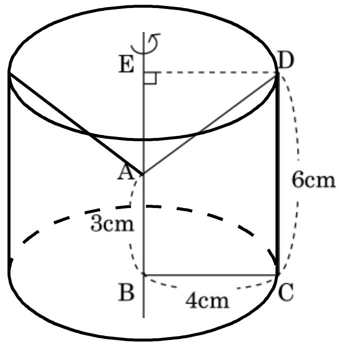
円錐の体積　$4 \times 4 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$

求める回転体の体積

$$4 \times 4 \times \pi \times 6 - 4 \times 4 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$= 96\pi - 16\pi$

$= 80\pi$



問２.

体積比＝相似比^3 ＝１：８　　面積比＝相似比^2＝１：４

体積　$3 \times 3 \times \pi \times 4 \times \frac{1}{3} \times 7 = 84\pi$

（別解）$6 \times 6 \times \pi \times 8 \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = 84\pi$

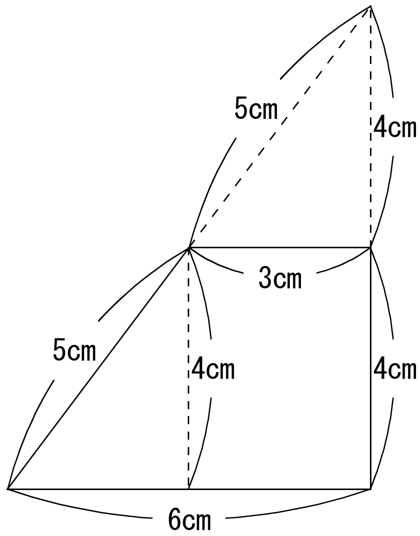
（別解）$6 \times 6 \times \pi \times 8 \times \frac{1}{3} - 3 \times 3 \times \pi \times 4 \times \frac{1}{3} = 84\pi$

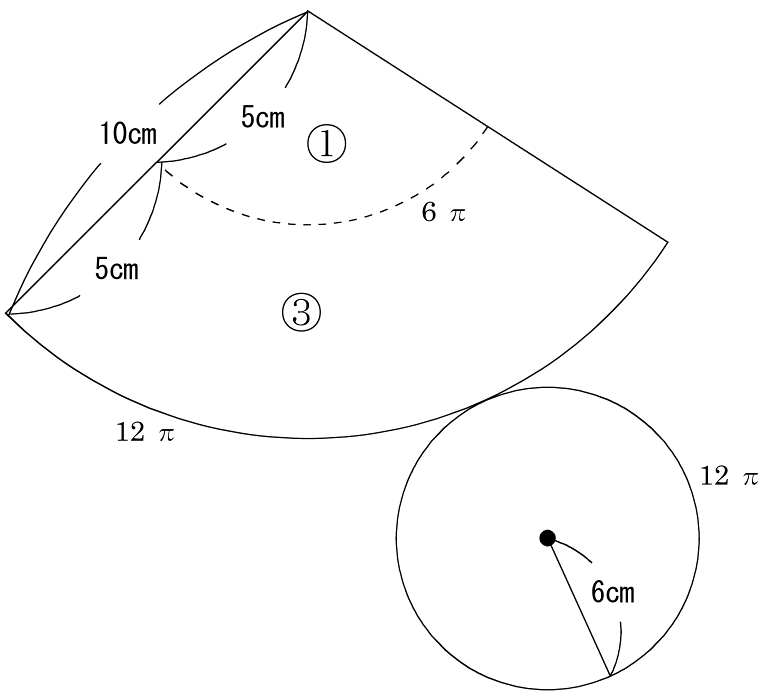
側面積　$5 \times 6\pi \times \frac{1}{2} \times 3 = 45\pi$

（別解）$10 \times 12\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 45\pi$

（別解）$12\pi \times 10 \times \frac{1}{2} - 6\pi \times 5 \times \frac{1}{2} = 45\pi$

（別解）$(12\pi + 6\pi) \times 5 \times \frac{1}{2} = 45\pi$





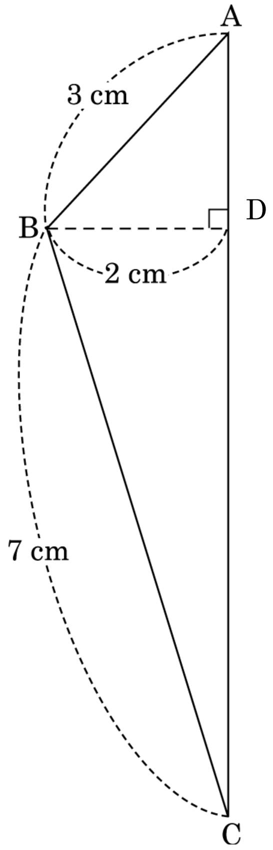
問３.

(ｱ)　頂点 B から辺 AC に引いた垂線と辺 AC との交点を D とすると，

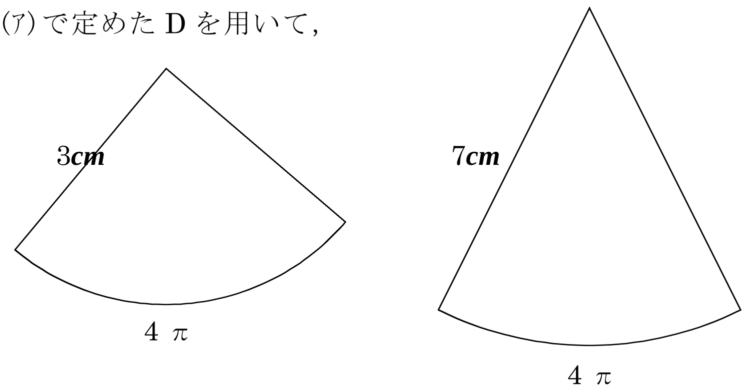
三平方の定理より，$AD^2 = 3^2 - 2^2 = 5$　　$AD = \sqrt{5}$

同様に，$CD^2 = 7^2 - 2^2 = 45$　　$CD = 3\sqrt{5}$

よって，$AC = AD + CD = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ (cm)



(ｲ)　(ｱ)で定めた D を用いて，



おうぎ形の面積の公式を使って

$$3 \times 4\pi \times \frac{1}{2} + 7 \times 4\pi \times \frac{1}{2} = 6\pi + 14\pi = 20\pi \ (\text{cm}^2)$$

円の面積からの割合で

$$\pi \times 3^2 \times \frac{4\pi}{6\pi} + \pi \times 7^2 \times \frac{4\pi}{14\pi} = 6\pi + 14\pi = 20\pi \ (\text{cm}^2)$$

相似比＝半径の比を使って

$$\pi \times 3^2 \times \frac{2}{3} + \pi \times 7^2 \times \frac{2}{7} = 6\pi + 14\pi = 20\pi \ (\text{cm}^2)$$

問４.

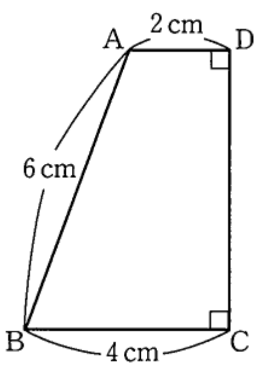
CD と BA の延長の交点を O とする。

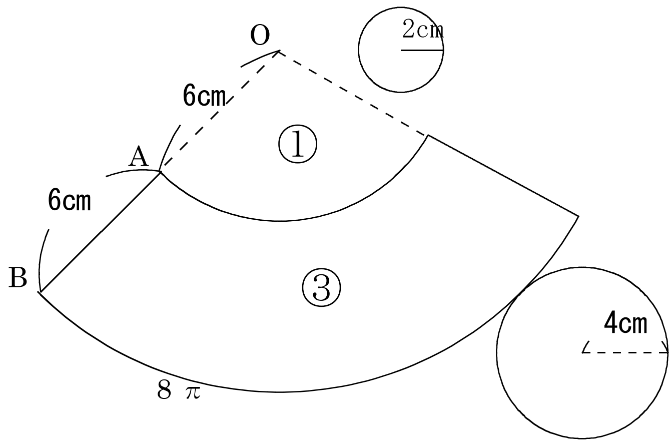
△ OBC で，AD // BC，AD : BC ＝ 1 : 2 より，OA : OB ＝ 1 : 2　　よって，OA ＝ AB ＝ 6 (cm)

△ OCB を OC を軸として 1 回転させてできる立体の側面は　おうぎ形になるので，

$12 \times 8\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 36\pi \ (\text{cm}^2)$　（相似比 1 : 2 →面積比 1 : 4）

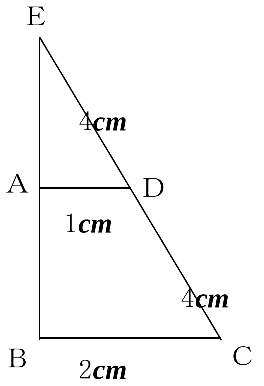
したがって，求める表面積は，$36\pi + 2^2\pi + 4^2\pi = 56\pi \ (\text{cm}^2)$





問５．

(ｱ)



ＢＡの延長とＣＤの延長との交点をＥとする

中点連結定理よりＥＣ＝ $8cm$

△ＥＢＣにおいて三平方の定理よりＥＢ^2＝ $8^2 - 2^2 = 60$

ＥＢ＞0より　ＥＢ＝$2\sqrt{15}$

△ＥＢＣを回転させてできる円錐の体積は

$$2 \times 2 \times \pi \times 2\sqrt{15} \times \frac{1}{3} = \frac{8\sqrt{15}}{3}\pi$$

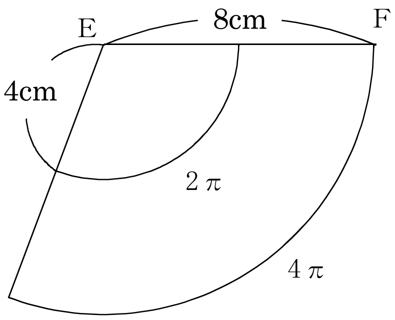
△ＥＡＤを回転させてできる円錐の体積は

$$1 \times 1 \times \pi \times \sqrt{15} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{15}}{3}\pi$$

引き算をすると　$\frac{8\sqrt{15}}{3}\pi - \frac{\sqrt{15}}{3}\pi = \frac{7\sqrt{15}}{3}\pi\ (cm^3)$

(別解)相似比 1：2 →体積比 1：8　割合で考えると　$4\pi \times 2\sqrt{15} \times \frac{1}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{7\sqrt{15}\pi}{3}\ (cm^3)$

(ｲ)展開図を書いてみる



中心角を出さないで

おうぎ形の面積の公式を利用して

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4\pi - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\pi = 12\pi\ (cm^2)$

(別解)

相似比 1：2　面積比 1：4 なので　1：(4 － 1)

大きい方を基準にして　割合で考えると

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4\pi \times \frac{3}{4} = 12\pi\ (cm^2)$

あるいは小さい方を基準にして　割合で考えると　$\frac{1}{2} \times 4 \times 2\pi \times 3 = 12\pi\ (cm^2)$

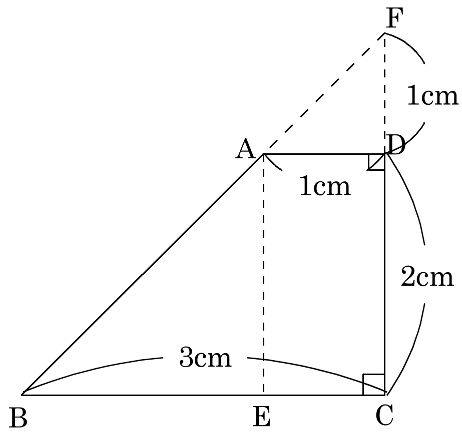
問６．

A から BC に垂線を引き交点を E とすると　∠ BAE ＝ 135 － 90 ＝ 45°

∠ AEB ＝ 90°なので　∠ ABE ＝ 45°　AE ＝ BE ＝ 2cm　なので　BC ＝ 3cm

△ FAD ∽△ FBC で相似比は 1：3　立体の体積比は $1^3 : 3^3 = 1 : 27$

したがって　$3 \times 3 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{26}{27} = \frac{26}{3}\pi$　cm^3



（別解）小さい方を基準にして　割合で考えると

$$1 \times 1 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{3} \times 26 = \frac{26}{3}\pi \quad cm^3$$

（別解）引き算で計算すると

$$9\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{26}{3}\pi$$

回転体の問題2

問１．図１は，AC ＝ 8 cm，BC ＝ 6 cm，∠ ACB ＝ 90°の直角三角形 ABC に，辺 AB の中点 D，辺 AC の中点 E をとり，点 D と点 E を結んだものである。図２は，図１の直角三角形 ABC を，辺 AC を軸として1回転させてできた回転体を表しており，点 B と点 C を通る直線と，円 C の円周との交点のうち，点 B と異なる点を F としたものである。また，円 C に平行で，点 E を中心とし，線分 ED を半径とする円を円 E とする。次の各問いに答えなさい。ただし，π は円周率を表す。(2005福岡)

(ｱ) 図１に示す図形で，線分 AB の長さを求めなさい。

(ｲ) 図２に示す回転体において，円 C を底面とし線分 AC を高さとする円すいの体積を求めなさい。

(ｳ) 図２に示す回転体において，円 E の円周上に点 P を，△ BPF の面積が最も大きくなるようにとる。このとき，△ BPF の面積を求めなさい。

図１

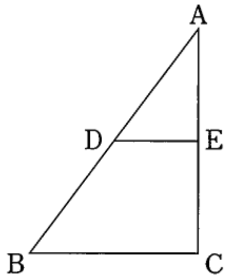
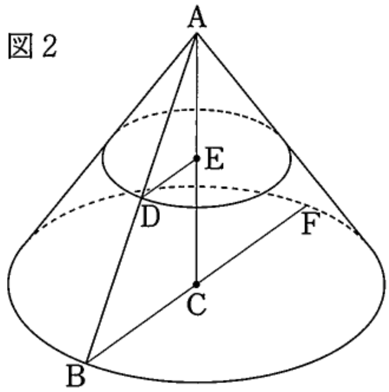


図２

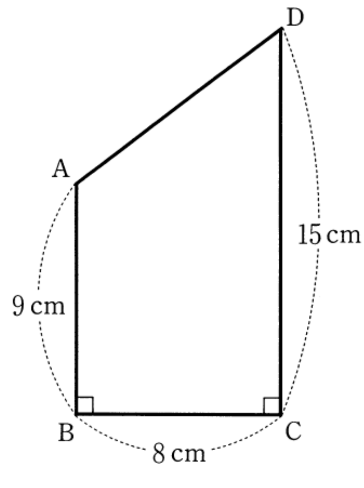


問２．下の図は，ＡＢ＝９　cm，ＢＣ＝８　cm，ＣＤ＝15cm，∠Ｂ＝∠Ｃ＝90°の台形である。このとき，次の(ｱ)～(ｳ)に答えなさい。ただし，円周率はπとする。(2000山梨)

(ｱ)　辺ＡＤの長さを求めなさい。

(ｲ)　辺ＣＤを軸として１回転させてできる立体の表面積を求めなさい。

(ｳ)　辺ＡＤを軸として１回転させてできる立体において，点Ｃがえがく円の周の長さを求めなさい。



問３．図１は，AB ＝ 2 cm，BC ＝ CD ＝ DA ＝ 1 cm の台形 ABCD である。この台形 ABCD と合同な台形をたくさん用意し，これらの台形を並べてつくる図形について，次の問いに答えなさい。

図１

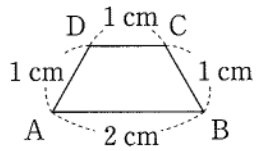
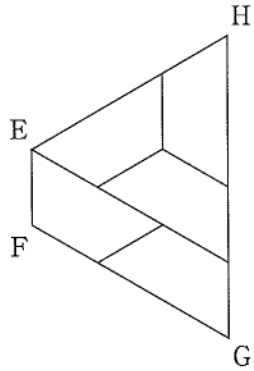


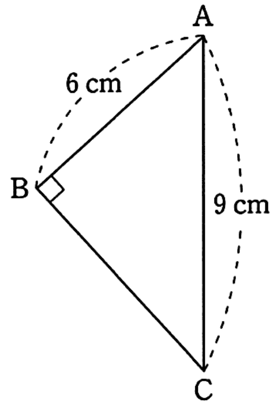
図３は，これらの台形5個をすき間なく重ならないように並べてつくった，EF∥HG，EF ＜ HG の台形 EFGH である。この台形 EFGH を，辺 GH を軸として1回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。（平塚江南2009）

図３



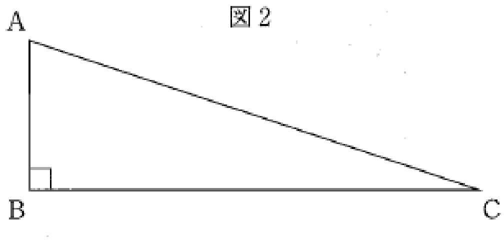
問４．図２のような，AB ＝ 6 cm，AC ＝ 9 cm，∠ ABC ＝ 90°の直角三角形 ABC がある。この直角三角形 ABC を，辺 AC を軸として1回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率はπとする。（小田原2007）

図２



問５．図２の三角形 ABC は，∠ ABC ＝ 90°，AB ＝ 1cm，BC ＝ 3cm の直角三角形である。この三角形 ABC を線分 AB を軸として１回転させてできる円すいの体積を Ucm^3，線分 BC を軸として１回転させてできる円すいの体積を Vcm^3 とするとき，U と V の比を**もっとも簡単な整数の比**で求めなさい。（2011湘南）

図２



問１.

(ア) 3 : 4 : 5 の 2 倍の 6 : 8 : 10 より 10 （cm）

(イ) $6 \times 6 \times \pi \times 8 \times \frac{1}{3} = 96\pi$ （cm^3）

(ウ) 30 （cm^2）

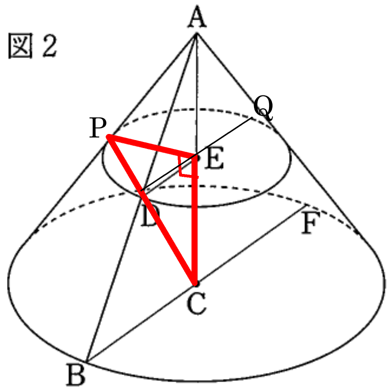
△ABC において，AD ＝ DB，AE ＝ EC より，

中点連結定理より，DE // BC，$DE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$（cm）

DE の延長と円 E の円周との交点を Q とおくと，
△BPF の面積が最も大きくなるのは直径 BF から，
円 E の円周への距離が最も長くなるときだから，
点 P が弧 DQ の中点になるとき。
よって，このとき，△PBF は二等辺三角形になり，
PC は直角三角形 CEP の斜辺となる。
3 : 4 : 5 より　CP ＝ 5（cm），

$\triangle BPF = \frac{1}{2} \times BF \times CP = \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$（$cm^2$）

図２



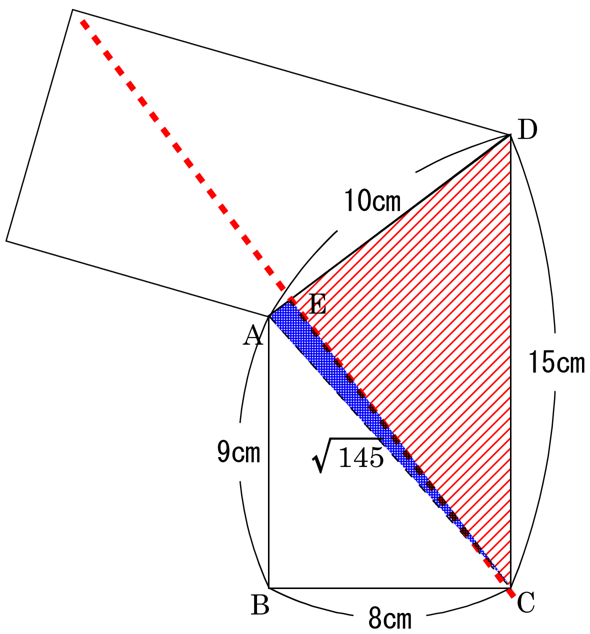
問２.

(ア) 3 : 4 : 5 の 2 倍の 6 : 8 : 10 より 10 （cm）

(イ) おうぎ形 $10 \times 16\pi \times \frac{1}{2} = 80\pi$　　側面積の長方形 $9 \times 16\pi = 144\pi$　　底面積64π

$80\pi + 144\pi + 64\pi = 288\pi$ cm^2

(ウ)



$AC^2 = 8^2 + 9^2 = 145$

AE ＝ x とおいて CE^2を 2 通りで表す

△ACE において三平方の定理より

$CE^2 = (\sqrt{145})^2 - x^2$

△ECD において三平方の定理より

$CE^2 = 15^2 - (10 - x)^2$

したがって

$15^2 - (10 - x)^2 = (\sqrt{145})^2 - x^2$

$225 - 100 + 20x - x^2 = 145 - x^2$

$20x = 145 - 125$

$20x = 20$

$x = 1$

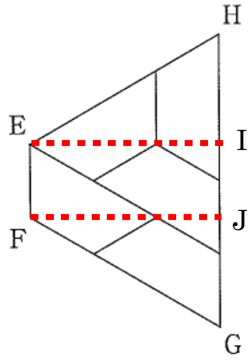
AE ＝1より　DE ＝10－1＝9

3 : 4 : 5の3倍より EC ＝12

直径が24cm となるので　円周は24π cm

問３．

(ｲ) EF//HG，EF ＜ HG の台形 EFGH である。この台形 EFGH を，辺 GH を軸として1回転させたときにできる立体の体積を求めなさい。ただし，円周率は π とする。



E，F から HG にそれぞれ垂線 EI，FJ をひく。

△ EHI は∠ EHI ＝ 60°の直角三角形だから，

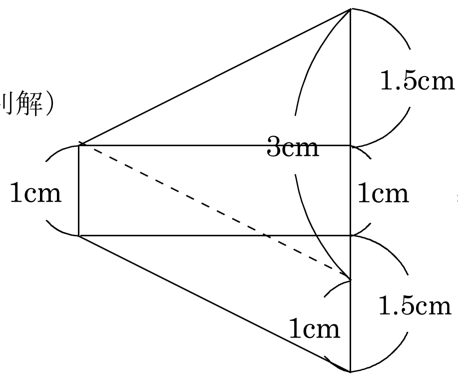
$HI = \dfrac{EH}{2} = \dfrac{3}{2}$(cm)，$EI = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$(cm)　　△ FGJ ≡ △ EHI，

$GJ = (4 - 1) \div 2 = \dfrac{3}{2}$(cm)，

$FJ^2 = 3^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{27}{4}$　　したがって、$FJ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$(cm)

求める立体は，△ FGJ と△ EHI を回転させたものと，四角形 EFJI を回転させたものを足したもの，その体積は，$\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{3} \times 2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times 1 = \dfrac{27}{2}\pi$ (cm^3)

（別解）



$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times 1 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{27}{4}\pi \times 2$$

問４． $BC^2 = 9^2 - 6^2$　BC ＞ 0 より　$BC = 3\sqrt{5}$　B から AC に垂線 BH をひく。

△ ABH と△ ACB において，　共通なので∠ BAH ＝∠ CAB　…　①

∠ AHB ＝∠ ABC ＝ 90°　　…　②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△ ABH ∽△ ACB

よって，BH : CB ＝ AB : AC　$BH : 3\sqrt{5} = 6 : 9$

$9BH = 18\sqrt{5}$　　　$BH = 2\sqrt{5}$

したがって，求める体積は，

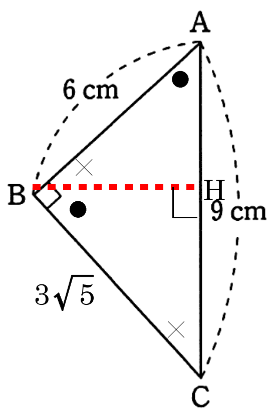
$\dfrac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{5})^2 \times AH + \dfrac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{5})^2 \times CH$

$= \dfrac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{5})^2 \times (AH + CH)$

$= \dfrac{1}{3}\pi \times (2\sqrt{5})^2 \times 9$

$= 60\pi$ (cm^3)

図２



問５．U : V ＝ 3 : 1

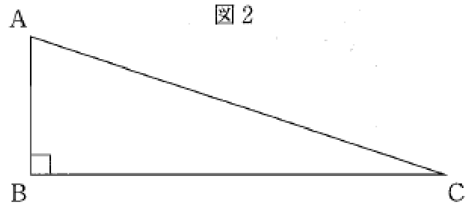


図２

線分 AB を軸として１回転させてできる円すいの体積を $U\mathrm{cm}^3$,

$$3 \times 3 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{3}$$

線分 BC を軸として１回転させてできる円すいの体積を $V\mathrm{cm}^3$

$$1 \times 1 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{3}$$