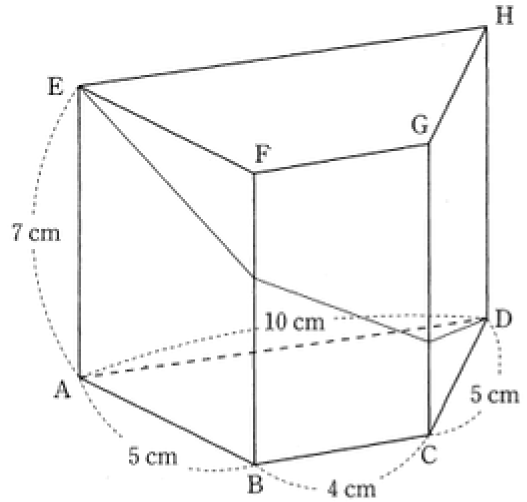
立体の最短距離の問題３

問１．右の図は、辺 AD と辺 BC が平行で、AD＝10cm、BC＝4cm、AB＝CD＝5cm の台形 ABCD を底面とし、AE＝BF＝CG＝DH＝7cm を高さとする四角柱である。このとき、次の問いに答えなさい。(H14)

(ア) この四角柱の側面上に、頂点 E から辺 BF と辺 CG に交わるように、頂点 D まで線を引く。このような線のうち、最も短い線の長さを求めなさい。

(イ) 平行な 2 つの線分 AD，FG をふくむ平面でこの四角柱を切り、2 つの立体に分けるとき、頂点 B をふくむほうの立体の体積を求めなさい。

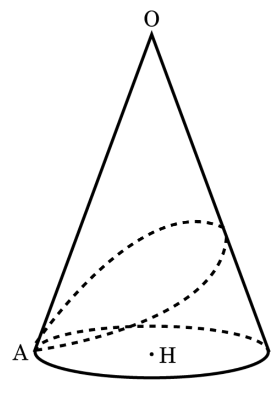


問２．下の図のように，底面の半径が 1 cm，母線の長さが 3 cm の円すいがある。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，円周率は π を用いることとする。(03 千葉県立船橋東高校)

⑴　この円すいの表面積を求めなさい。

⑵　この円すいの底面の円周上の１点を A とする。点 A を出発して円すいの側面を１周して点 A に戻る最も短い経路の長さを求めなさい。

⑶　底面の円の中心を H とする。線分 OH の中点を通り底面に平行な平面で，この円すいを切り離す。このときできる２つの立体のうち，頂点 O を含まない方の立体の体積を求めなさい。

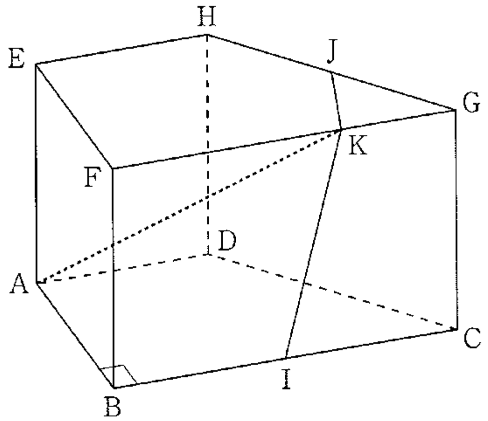


問３．右の図は，AD // BC，AD＝3 cm，BC＝6 cm，∠ABC＝90°の台形 ABCD を底面とし，AE＝BF＝CG＝DH＝4 cm を高さとする四角柱であり，四角形 ABFE は正方形である。

また，2 点 I，J はそれぞれ辺 BC，辺 GH の中点である。このとき，次の問いに答えなさい。(H22)

(ア) この四角柱の表面積を求めなさい。

(イ) この四角柱の表面上に，点 I から辺 FG に交わるように点 J まで線を引く。このような線のうち，長さが最も短くなるように引いた線が，辺 FG に交わっている点を K とするとき，2 点 A，K 間の距離を求めなさい。



問４．右の図は，ＡＢ＝４cm，ＡＤ＝３cm，ＡＥ＝６cm の直方体である。辺ＥＦの中点をＭとするとき，次の問いに答えなさい。(H9)

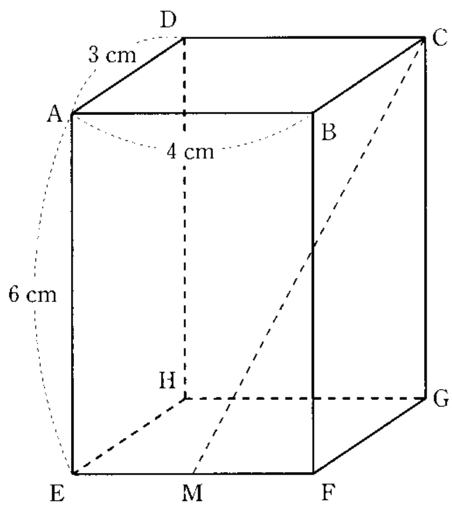
(ア) ２点Ｃ，Ｍ間の距離を求めなさい。

(イ) ２点Ａ，Ｃを通るいろいろな平面でこの直方体を切るとき，切り口と**ならない**図形を次の中から**すべて**選び，その番号を書きなさい。

１．正方形　　２．長方形　　３．台形

４．正三角形　５．二等辺三角形　６．どの辺も等しくない三角形

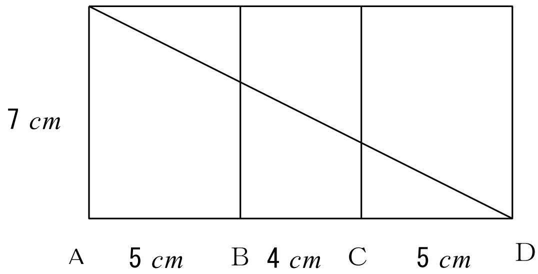
(ウ) ３点Ａ，Ｃ，Ｍを通る平面でこの直方体を切り，２つの立体に分けるとき，頂点Ｂをふくむほうの立体の体積を求めなさい。



立体の最短距離の問題３

問１.

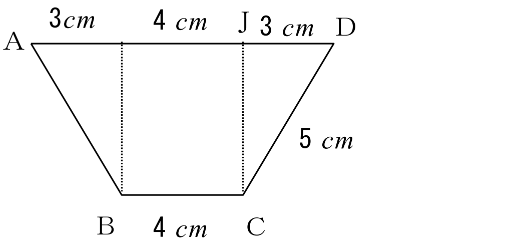
(ｱ)

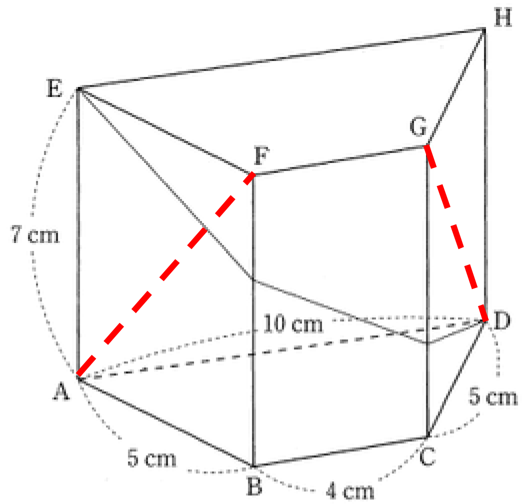


△ＥＡＤにおいて
三平方の定理より
$ED^2 = 7^2 + 14^2$
$= 245$

ＥＤ＞0 より　ＥＤ＝　$7\sqrt{5}$

(ｲ)





ＣからＡＤへ垂線を引き交点をＪとする
△ＣＪＤにおいて三平方の定理より　ＣＪ＝4 *cm*
真ん中は、四角柱の半分で $4\times4\times7\div2=56$
両側は、三角錐２つ分で $\underbrace{3\times4\div2}_{\text{底面積}}\times7\div3\times2=28$

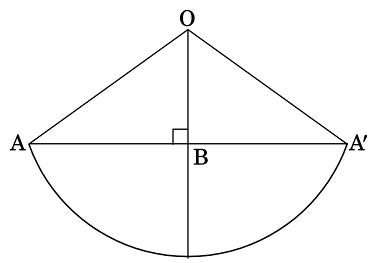
$56+28=84$　(cm^3)

問２.

(1)円すいの側面のおうぎ形の中心角を x° とすると，$2\pi\times3\times\frac{x}{360}=2\pi\times1$

$x=360\times\frac{1}{3}=120$　　よって，円すいの表面積は，$\pi\times1^2+\pi\times3^2\times\frac{120}{360}=4\pi$ (cm^2)

(2)右図において，線分 AA′ が求める最短経路になる。
O から AA′ に垂線 OB をひくと，
$\angle AOB=120^\circ\times\frac{1}{2}=60^\circ$ だから，
$AB=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　よって，$AA'=2AB=3\sqrt{3}$ (cm)



(3) △OAH に三平方の定理を用いて，$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=2\sqrt{2}$
OH の中点を M とおくと，$OM=\frac{1}{2}OH=\sqrt{2}$
OM を高さとする円すいの底面の半径は $\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}$
よって，求める立体の体積は，$\frac{1}{3}\times\pi\times1^2\times2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{12}\pi$ (cm^3)

問３.

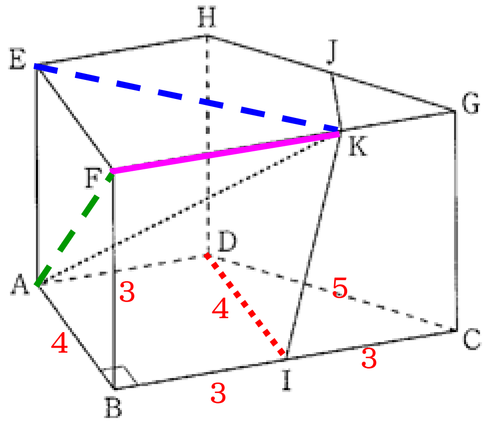
(ｱ) $(4+6+5+3)\times4=72$　$(3+6)\times4\div2\times2=36$　　$72+36=108$　　108（cm^2）

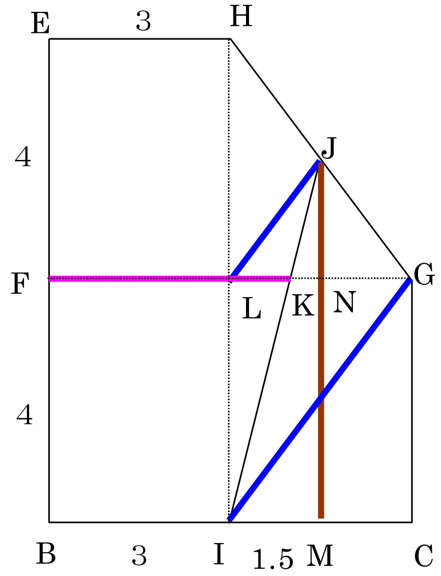
(ｲ) 四角形 EFGH と四角形 FBCG を辺 FG はつなげたまま展開する。IJ が最短より，展開図上で線分 IJ と FG との交点が K となる。HI と FG との交点を L とおくと，EH＝BI＝FL＝3 cm　**L と J，I と G を結ぶと**，HL＝LI＝4 cm，HJ＝JG より，中点連結定理から，

LJ // IG，LJ：IG＝1：2　よって，LK：KG＝1：2　$LK=\frac{1}{3}LG=\frac{1}{3}\times3=1$ (cm)

よって，FK＝3＋1＝4 (cm)　**△EFK** で，三平方の定理より，EK＝ $4\sqrt{2}$ cm

△AEK で，三平方の定理より，$AK^2=(4\sqrt{2})^2+4^2=48$　AK＞0 より，AK＝ $4\sqrt{3}$ (cm)





(別) **△ABF** で，三平方の定理より，AF＝ $4\sqrt{2}$

△AFK で，三平方の定理より，AK＝ $4\sqrt{3}$

(別) JN：JM＝1：3＝KN：IM＝0.5：1.5　　従って、LK＝1　∴FK＝4

問４.

(ｱ) 三平方の定理を利用して

$$CM^2=2^2+3^2+6^2=49 \qquad \therefore CM=7$$

(ｲ) ２．○　点Ａ，Ｃ，Ｇ，Ｅを通ると切り口が長方形になる

３．○　点Ａ，Ｃ，ＦＧの中点，Ｍ を通ると切り口が台形になる

１．×　すべて５ *cm* の正方形にはならない

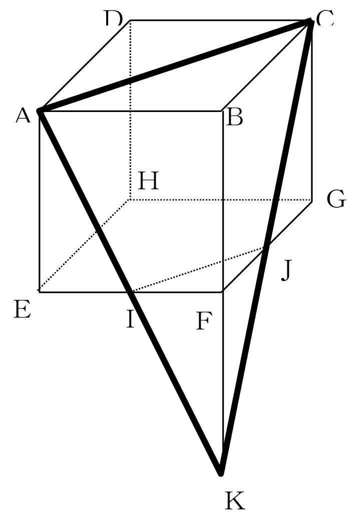
６．○　点Ａ，Ｃ，Ｆを通ると切り口がどの辺も等しくない三角形になる

５．○　点Ａ，Ｃ，ＢＦ上のＢから３ *cm* の点を通ると二等辺三角形になる

点Ａ，Ｃ，ＢＦ上のＢから４ *cm* の点を通ると二等辺三角形になる

４．×　すべて５ *cm* の正三角形にはならない

(ｳ)



三角錐ＡＢＣＫの体積

$$4\times3\times\frac{1}{2}\times12\times\frac{1}{3}=24$$

三角錐ＩＦＪＫの体積

$$2\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{3}=3$$

２４－３＝２１　（cm^3）

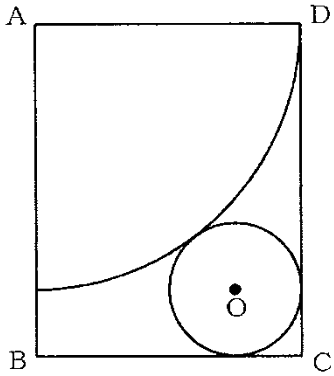
一度にやるには

$$4\times3\times\frac{1}{2}\times12\times\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}=21$$

立体の最短距離の問題４

問５．**図Ⅰ**は，長方形 ABCD に円すいの展開図をかいたものである。円すいの側面は A を中心とする半径 AD，中心角 90° のおうぎ形で，底面である円 O は，辺 DC，BC とおうぎ形の弧に接している。

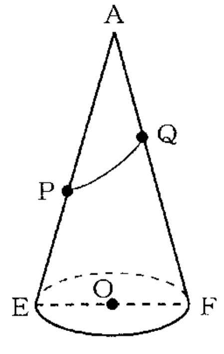
図Ⅱは，**図Ⅰ**の展開図の部分を組み立ててできる円すいで，線分 EF は円 O の直径，P，Q はそれぞれ線分 AE，AF 上の点である。AB＝15 cm，AP＝7 cm，AQ＝$3\sqrt{2}$ cm のとき，次の(ｱ)，(ｲ)の問いに答えよ。(09 愛知 A)



図Ⅰ

(ｱ) **図Ⅱ**の円すいの体積は何 cm^3 か。

(ｲ) **図Ⅱ**の円すいの側面に，点 P から点 Q まで糸をかける。糸の長さが最も短くなるようにするとき，その糸の長さは何 cm か。

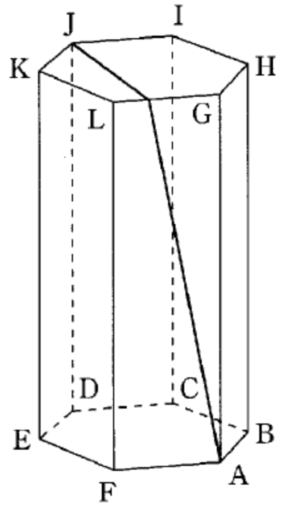


図Ⅱ

問６．次の問いに答えなさい。(08 横須賀)

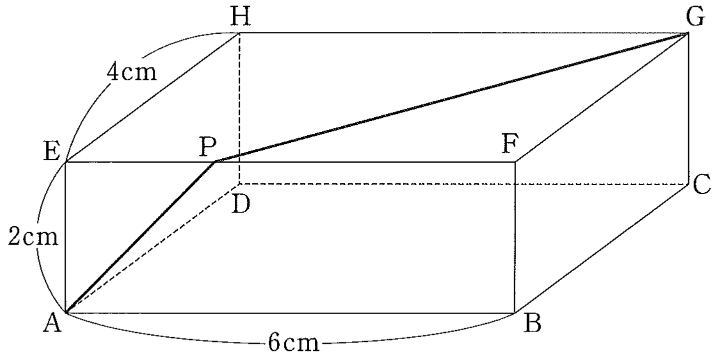
(ｱ) 底面が 1 辺 2cm の正六角形で，側面がすべて長方形である正六角柱がある。側面積が底面積の 10 倍であるとき，正六角柱の高さを求めなさい。

(ｲ) 図は、正六角形 ABCDEF を底面とする正六角柱で，辺 AG，辺 BH，辺 CI，辺 DJ，辺 EK，辺 FL はすべて底面に垂直であり，その長さはすべて線分 AC の 2 倍である。正六角柱の表面に，点 A から辺 LG に交わるように，点 J まで糸をかける。糸の長さが最も短くなるようにかけると，かけた糸の長さは 14cm であった。このとき，辺 AB の長さを求めなさい。ただし，糸の伸び縮みおよび太さは考えないものとする。



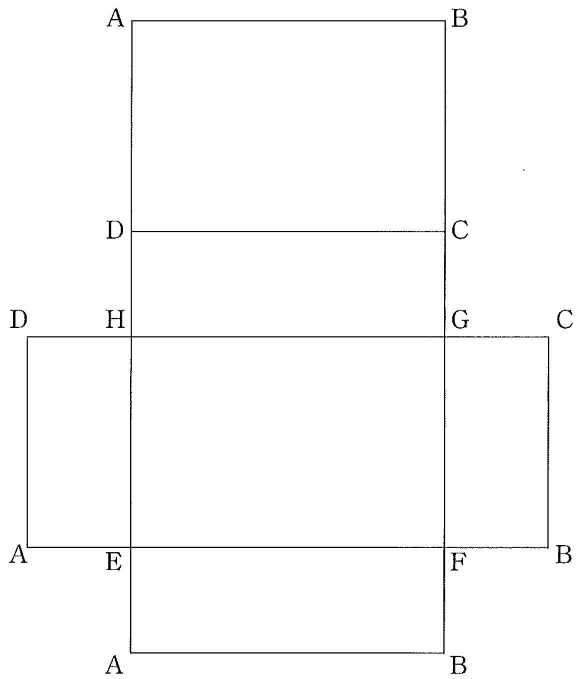
問７．図１のように，AB＝6 cm，AE＝2 cm，EH＝4 cm の直方体があり，頂点 A から頂点 G まで，黒いひもを辺 EF に交わるようにかける。黒いひもの長さが最も短くなるとき，黒いひもと辺 EF が交わる点を P とする。このとき，次の問いに答えなさい。(12 佐賀)

図１



(ｱ) 黒いひもが通る線を，直方体の展開図**図２**に図示しなさい。

図２



(ｲ) 黒いひもの長さを求めなさい。

(ｳ) 図１の直方体に，頂点 B から頂点 D まで赤いひもを辺 EF，辺 HG の順に交わるようにかける。赤いひもの長さが最も短くなるとき，赤いひもと辺 EF が交わる点を Q，赤いひもと辺 HG が交わる点を R，赤いひもと黒いひもが交わる点を S とする。

　このとき，(1)～(4)の各問いに答えなさい。

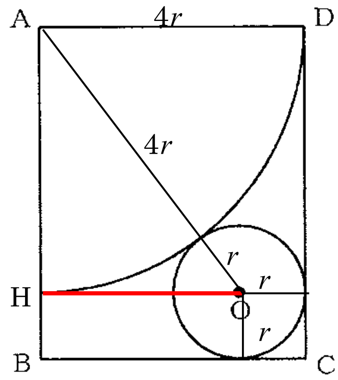
(1) △SPQ∽△SGR であることを証明しなさい。

(2) HR の長さを求めなさい。

(3) RQ の長さを求めなさい。

(4) RS の長さを求めなさい。

問５.



(1) 底面の円の半径を r cm，おうぎ形の半径を x cm とすると，
円周はおうぎ形の弧の長さと等しいので，

$2\pi r = 2\pi x \times \dfrac{1}{4}$　$x = 4r$ (cm)

O から AB に垂線 OH をひくと，

$AO = 4r + r = 5r$ (cm)，$OH = 4r - r = 3r$ (cm)，$AH = 15 - r$ (cm)

△AOH で三平方の定理より，

$(15-r)^2 + (3r)^2 = (5r)^2$　$225 - 30r + r^2 + 9r^2 = 25r^2$

$15r^2 + 30r - 225 = 0$　$15(r+5)(r-3) = 0$　$r > 0$ より，$r = 3$ (cm)

よって，おうぎ形の半径は $4 \times 3 = 12$ (cm)　円すいの高さは，$\sqrt{12^2 - 3^2} = 3\sqrt{15}$ (cm)

求める体積は，$\dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 3\sqrt{15} = 9\sqrt{15}\,\pi$ (cm^3)

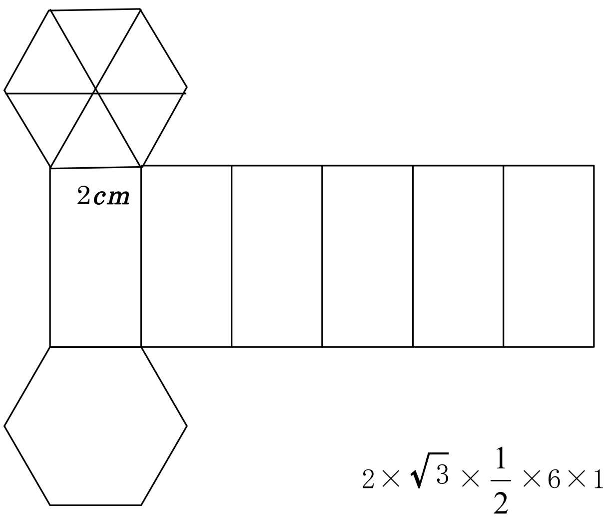
(2) 側面の展開図において，90°の頂角を 2 等分する直線 AR をひく。
AR 上に $AQ = 3\sqrt{2}$ cm となる点 Q，AB 上に $AP = 7$ cm の点 P をとる。
Q から AB に垂線 QK をひくと，△AQK は直角二等辺三角形になるので，

$1 : 1 : \sqrt{2}$ より $AK = QK = \dfrac{AQ}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$ (cm)　よって，$PK = 7 - 3 = 4$ (cm)

△QPK において三平方の定理より，$PQ = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm)

問６.

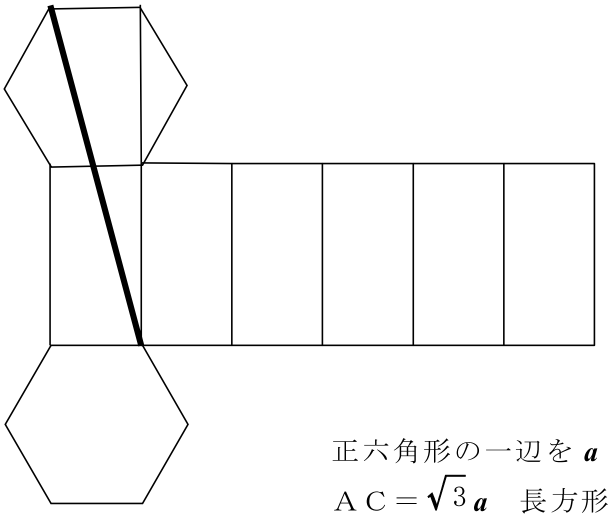
(ア)



$2 \times \sqrt{3} \times \dfrac{1}{2} \times 6 \times 10 = 2 \times \boldsymbol{h} \times 6$

$\boldsymbol{h} = 5\sqrt{3}$　(cm)

(ｲ)



正六角形の一辺を $\boldsymbol{a}$ とおくと、

AC＝$\sqrt{3}\boldsymbol{a}$　長方形の高さは $2\sqrt{3}\boldsymbol{a}$　となるので、

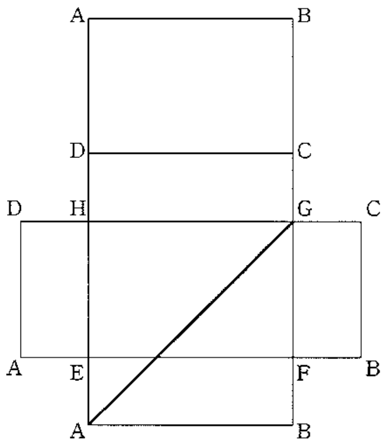
$\boldsymbol{a}^2+(3\sqrt{3}\boldsymbol{a})^2=14^2$

$28\boldsymbol{a}^2=196$

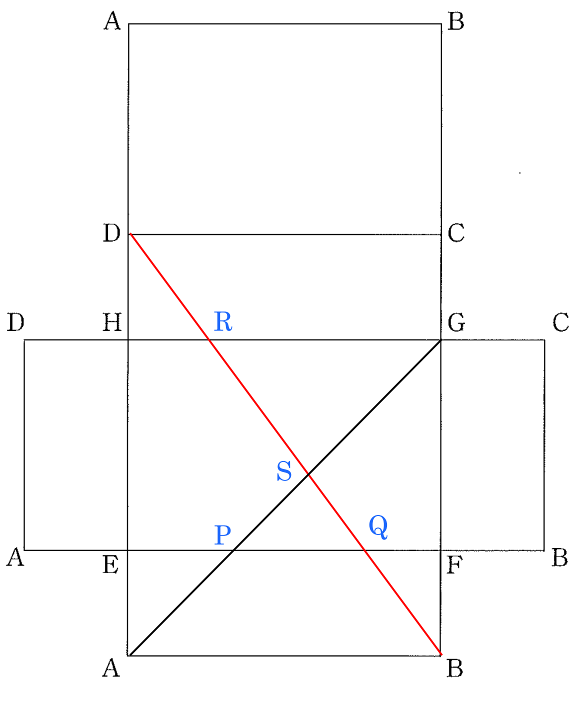
$\boldsymbol{a}^2=7$

$\boldsymbol{a}>0$ より　　$\boldsymbol{a}=\sqrt{7}$　（$\boldsymbol{cm}$）

問７． (ｱ)



(ｲ) 1：1：$\sqrt{2}$ より　$6\sqrt{2}$　cm



(ｳ)

(1)　△SPQ と△SGR において

対頂角は等しいので

∠PSQ ＝∠GSR　…①

PQ // GR より，錯角は等しいので

∠SPQ ＝∠SGR　…②

①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいので

△SPQ　∽　△SGR

(2) 2：8＝HR：6

HR＝$\dfrac{3}{2}$　cm

(3) DB＝10　cm

RQ＝ 5　cm

△DABにおいて，三平方の定理より，DB＝$\sqrt{8^2+6^2}$＝10 (cm)　HR // EQ // AB より，

DR：RQ：QR＝DH：HE：EA＝2：4：2＝1：2：1　よって，RQ＝$\frac{2}{4}$DB＝$\frac{2}{4}\times 10=5$ (cm)

(4) $\frac{45}{14}$　cm

RG＝$6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ (cm)　EP // HG より，△AEP∽△AHG　EP：6＝2：6　EP＝2 (cm)

BF // AD より，△BQF∽△DQE　FQ：QE＝FB：DE＝2：6＝1：3

よって，FQ＝$\frac{1}{4}$EF＝$\frac{1}{4}\times 6=\frac{3}{2}$ (cm)

PQ＝$6-2-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ (cm)　RG // PQ より，RS：SQ＝RG：PQ＝$\frac{9}{2}$：$\frac{5}{2}$＝9：5

よって，RS＝$\frac{9}{14}$RQ＝$\frac{9}{14}\times 5=\frac{45}{14}$ (cm)